Examen de mécanique des fluides
promotion 117

6 février 2002

- **Partie A : traiter deux exercices au choix parmi les trois proposés. Durée : 1h 15 mn.**
- **Partie B : traiter les parties 1, 2 et 3.1. Traiter au choix, soit la partie 3.2 soit la partie 4. Durée : 2h 15 mn.**
- **Rédiger les parties A et B sur des copies séparées.**
- **Lisez attentivement l'intégralité des énoncés.**
- **La plupart des résultats sont donnés dans l'énoncé. Ne vous bloquez pas sur une question si vous n'arrivez pas à la résoudre.**

Partie A

Exercice 1
Etalement par centrifugation

La technique d'étalement par centrifugation (spin coating) est couramment utilisée pour étaler des couches minces de liquide sur un substrat solide plan. La couche de liquide visqueux a une épaisseur h qui dépend de la position radiale r et du temps (fig. 1). On suppose que la couche de liquide conserve cette symétrie cylindrique au cours de l'étalement. Le substrat solide tourne à une vitesse angulaire ω.

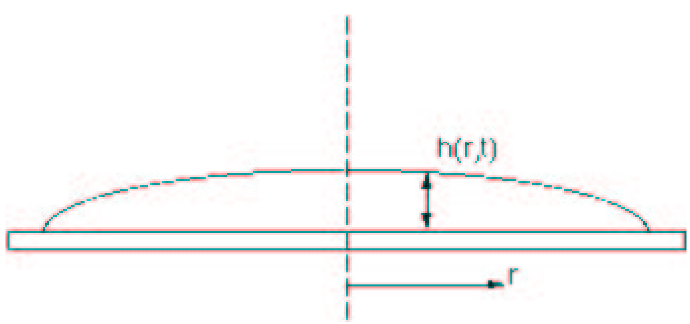

Fig. 1 – *Schéma de l'étalement par centrifugation*

La vitesse ω est de l'ordre de 1000 tours/min et l'épaisseur de la couche liquide varie de 100 μm à 1 μm. Le rayon du disque tournant est 5 cm.

1. Rappeler les hypothèses de l'approximation de lubrification.
2. Montrer que la composante radiale de vitesse u obéit à l'équation :

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \omega^2 r$$

où ρ est la masse volumique du liquide et η sa viscosité dynamique.

3. Quelles sont les conditions aux limites pour la vitesse u?
4. Montrer que le débit, intégré sur l'épaisseur h, est :

$$q(r) = \frac{\omega^2 r}{\nu}\frac{h^3}{3}$$

5. Montrer que la conservation de la masse conduit à :

$$r\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega^2 r^2}{\nu}\frac{h^3}{3}\right) = 0$$

6. L'expérience montre que, très rapidement après le début de l'étalement, l'épaisseur de la couche de liquide est pratiquement indépendante de r. Quelle est alors la loi d'évolution de h en fonction du temps? Quel temps faut-il pour amincir de 100 à 1 μm une couche de liquide dont la viscosité cinématique est 0.5 cm^2/s, à une vitesse de rotation de 1000 tours/min. ?

Exercice 2
Implosion d'une bulle

Les bulles de gaz formées dans un liquide, par exemple par le phénomène de cavitation, peuvent imploser très rapidement et provoquer de très fortes surpressions locales. Nous cherchons ici à estimer cette surpression.

1. Pour une bulle de gaz dans l'eau, de quelques mm de diamètre, les temps d'implosion sont de l'ordre de la ms. Estimer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement dans l'eau.
2. Afin d'estimer la surpression engendrée par l'implosion des bulles de gaz, il faut déterminer l'écoulement radial de fluide associé aux variations du rayon R d'une bulle. Quel est l'écoulement potentiel satisfaisant la symétrie sphérique (avec un champ de vitesse purement radial) accompagnant les variations de rayon de la bulle? On rappelle que l'expression du laplacien en coordonnées sphériques r,θ,φ est:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

3. Déterminer le champ de pression associé à cet écoulement instationnaire et montrer que le rayon de la bulle obéit à l'équation suivante :

$$\frac{p_b - p_0}{\rho} = \frac{3}{2}\dot{R}^2 + R\ddot{R}$$

   où p_b est la pression à la surface de la bulle et p_0 la pression loin de la bulle.
4. En intégrant une fois la relation donnée ci-dessus, exprimer la relation entre p_0 et le rayon maximal de la bulle R_m (rayon atteint lorsque $p_b \ll p_0$).
5. Lorsque le bulle implose et que son rayon devient très petit devant R_m, montrer que la vitesse du liquide varie comme $R^{1/2}$.
6. Montrer que la surpression maximale au voisinage de la bulle qui implose varie comme : $(p_0 - p_v)(R_m/R)^3$ où p_v est la pression de vapeur saturante. Estimer cette surpression lorsque la pression ambiante est égale à une atmosphère et que la bulle a implosé jusqu'à un dixième de son rayon maximal et en supposant que la pression de vapeur saturante est très petite devant la pression atmosphérique.

Exercice 3
Solution de polymère dans un Couette cylindrique

On étudie l'écoulement d'une solution de polymère dans un écoulement de Couette, constitué de deux cylindres coaxiaux. Les caractéristiques rhéologiques de cette solution sont données sur la fig. 2.

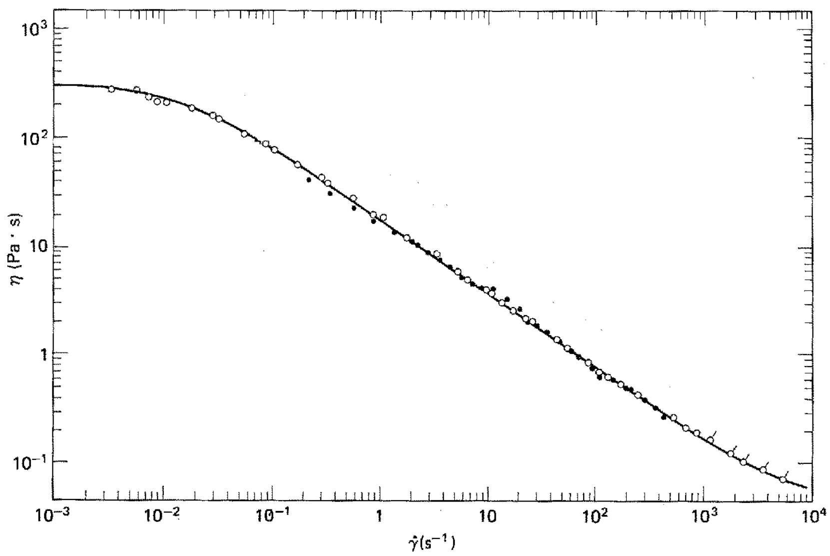

FIG. 2 – *Viscosité de cisaillement en fonction du gradient de vitesse pour une solution de polymère.*

1. Comment peut-on qualifier le comportement rhéologique de cette solution de polymère? Plus précisément, quelle loi permet de représenter la viscosité en fonction du gradient de vitesse, dans la gamme de gradient de vitesse comprise entre $10^{-1}\mathbf{s}^{-1}$ et $10^3\mathbf{s}^{-1}$?
2. On suppose que l'écoulement est stationnaire. Montrer, en écrivant l'équilibre mécanique d'un petit élément de volume, que la loi fondamentale de la dynamique se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sigma_{r\theta}\right) = 0$$

3. En coordonnées cylindriques, les différentes composantes du tenseur des vitesses de déformation (partie symétrique du gradient de vitesse) s'écrivent :

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$e_{r\theta} = \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{2r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

Montrer que, dans la situation présente, le tenseur des vitesses de déformation se réduit à :

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right)$$

Expliquer qualitativement la raison de la présence du second terme entre parenthèses.

4. A partir des données de viscosité pour la solution de polymère et en cherchant un profil de vitesse de la forme : $u_\theta = \sum_m A_m r^m$, déterminer l'équation à laquelle doivent obéir les exposants m.
5. Quelles seraient les conditions aux limites permettant de déterminer complètement le champ de vitesse?

Partie B
De la vidange sous toutes ses formes

1. Préambule

Dans ce problème, on étudie la dynamique de vidange de tubes remplis de liquide sous l'effet de la gravité. Selon les conditions expérimentales, les régimes de vidange peuvent être très différents. Pour essayer de classer les différentes situations et ne retenir que les phénomènes physiques pertinents, il est essentiel de définir les nombres sans dimension caractérisant le problème.

Montrer, par un raisonnement purement dimensionnel, que les nombres sans dimension qui interviennent dans ce problème sont :

- le nombre de Reynolds $Re = UR/\nu$
- le nombre capillaire $Ca = \eta U/\gamma$
- le nombre de Bond $Bo = \rho g R^2/\gamma$

et leurs différentes combinaisons (U étant la vitesse caractéristique de vidange, R le rayon du tube, ρ la masse volumique du liquide, η sa viscosité dynamique, ν sa viscosité cinématique et γ sa tension superficielle.

2. Vidange de tubes ouverts à leur extrémité supérieure

D'après C. Clanet, From Galileo to Torricelli, Phys. Fluids 2000

On analyse la vidange rapide de cylindres verticaux remplis de liquide. Les cylindres sont ouverts à leur extrémité supérieure et à leur extrémité inférieure par un orifice circulaire de diamètre d. Le diamètre D_0 des cylindres est compris entre 8 et 17 cm, leur longueur varie de 1 à 2 m. L'orifice inférieur peut être ouvert très rapidement pour laisser le liquide s'écouler. A l'aide d'une caméra rapide, on peut enregistrer la position de l'interface supérieure du liquide en fonction du temps (fig. 3). Le liquide contenu dans le tube est soit de l'eau, soit de l'éthanol. Les propriétés physiques des liquides sont données dans le tableau ci-dessous.

	ρ(kg/m^3)	ν(m^2/s)	γ (mN/m)
Eau	1000	$1 \quad 10^{-6}$	73
Ethanol	810	$1.5 \quad 10^{-6}$	25

1. Estimer le nombre de Reynolds associé à l'écoulement.
2. Montrer que dans le cas d'un tube entièrement ouvert à son extrémité inférieure ($d = D_0$), la vitesse de l'interface supérieure est, en valeur absolue :

$$v(z_i) = (2g|z_0 - z_i|)^{1/2}$$

   où z_0 est la position initiale de l'interface supérieure du liquide et z_i est la position de cette interface au cours du temps.
3. Montrer que, lorsque le tube est fermé à sa partie inférieure par un orifice de diamètre d ($d \ll D_0$), la vitesse de l'interface supérieure est, en valeur absolue :

$$v(z_i) = \left(\frac{d}{D_0}\right)^2 \sqrt{2gz_i}$$

   .
4. Calculer le temps de vidange T_V pour les deux situations.
5. En fonction du temps, quelle est l'évolution de la vitesse dans les deux régimes ? La vitesse augmente-t-elle ou diminue-t-elle ? Comparer cette évolution théorique à celle observée dans les expériences.

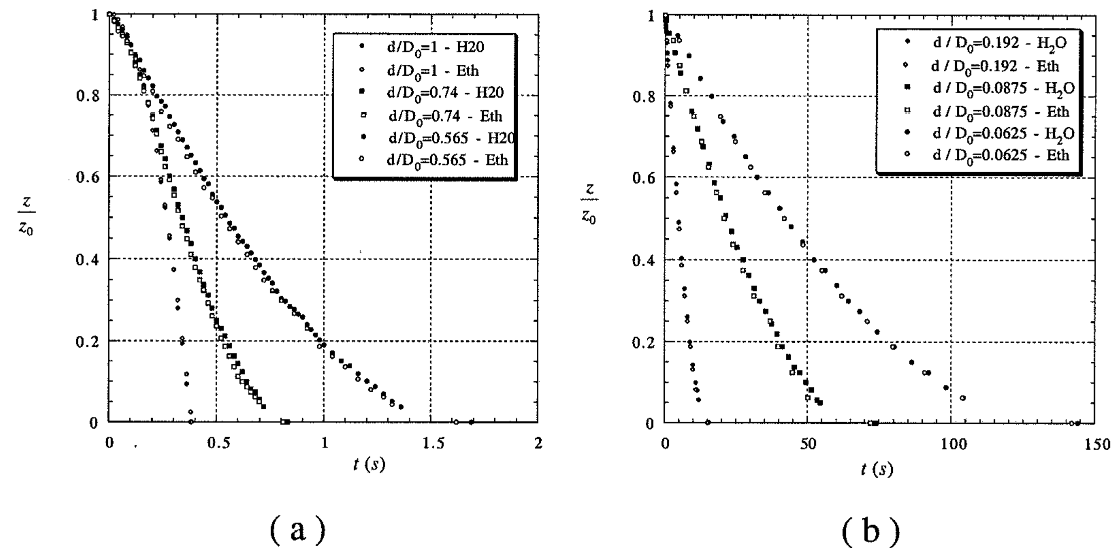

FIG. 3 – *Position de l'interface supérieure en fonction du temps. La position verticale est normalisée par la position initiale z_0. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs du rapport d/D_0. Les symboles fermés sont les expériences faites avec de l'eau. Les symboles ouverts avec de l'éthanol. Le diagramme de gauche montre les valeurs élevées de d/D_0* (> 0.565) *et le diagramme de droite les petites valeurs de d/D_0* (< 0.192). *Le diamètre du tube est 8 cm.*

6. On admettra que le champ de vitesse $v(z)$, entre la surface libre supérieure et l'orifice de vidange, est de la forme :
$$\frac{v(z) - v(z_i)}{v(0) - v(z_i)} = \left(\frac{z_i - z}{z_i}\right)^n$$
où z_i est la position courante de l'interface supérieure.
Montrer que l'équation d'Euler conduit à :
$$\int_{z=0}^{z=z_i} \frac{\partial v}{\partial t} dz + \left[\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right]_{z=0}^{z=z_i} = 0$$

3. Vidange de tubes fermés à leur extrémité supérieure

3.1 Tubes de grand diamètre

On examine la vitesse de vidange de tubes cylindriques remplis de liquide et fermés à leur extrémité supérieure. Commençons par des tubes de diamètre assez grand (quelques cm) et d'une longueur de quelques m. Lorsqu'on ouvre l'extrémité inférieure du tube, une longue bulle d'air monte dans le tube. La vitesse d'ascension U de l'extrémité supérieure de cette bulle est donnée dans le tableau ci-dessous, en fonction du diamètre du tube. Les données sont également représentées sur la fig.4.

Diamètre (cm)	1.23	2.16	5.14	7.94
U (cm/s)	10	14.8	24.6	30

Les données ci-dessus ont été obtenues avec un tube rempli d'eau. Si on refait l'expérience avec un tube rempli d'un mélange eau glycérol à 50%, dont la masse volumique est 1100 kg/m^3 et la viscosité dynamique 1 Pa.s, on trouve des vitesse d'ascension extrêmement voisines.

1. Comment varie la vitesse d'ascension en fonction du diamètre du tube ?

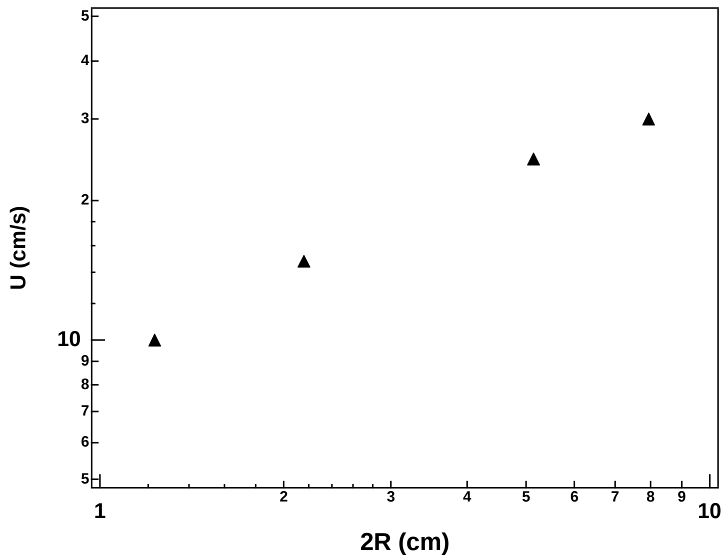

FIG. 4 – *Vitesse d'ascension d'une bulle d'air dans un tube rempli d'eau, en fonction du diamètre du tube*

2. Quel est la valeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement ?
3. D'après la valeur du nombre de Reynolds et les données expérimentales, quels sont les paramètres physiques qui déterminent la vitesse d'ascension de la bulle ?
4. Afin d'analyser l'écoulement autour de la partie supérieure de la bulle, on se place dans le référentiel qui se déplace à la vitesse U de la bulle. Montrer que, dans ce référentiel, la vitesse du liquide à l'interface air-liquide obéit à l'équation :

$$q(x)^2 = 2gx$$

   où x est la distance entre le sommet de la bulle et le point considéré et q est le module du vecteur vitesse le long de l'interface. Pourquoi faut-il se placer dans le référentiel lié à la bulle pour obtenir ce résultat ?
5. On peut représenter approximativement l'écoulement autour du sommet de la bulle par un potentiel des vitesses de la forme :

$$\Phi = -Ux + A \exp(K_1 x/R) J_0(K_1 r/R)$$

   où x est la distance depuis le sommet de la bulle, $J_0(r)$ est une fonction de Bessel de première espèce qui vérifie l'équation :

$$\frac{d^2 J_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_0}{dr} = -J_0$$

   Le paramètre K_1 est une racine de l'équation :

$$\frac{dJ_0(\zeta)}{d\zeta} = 0$$

   Justifier la forme choisie pour ce potentiel des vitesses (Quelle équation doit satisfaire le potentiel des vitesses ? Quelle condition aux limites doit satisfaire le champ de vitesse ?).
6. L'application de la condition $q(x)^2 = 2gx$ au point $r = R/2$ de l'interface liquide/air conduit à : $U \approx 0.46\sqrt{gR}$. Comment ce résultat se compare-t-il aux données expérimentales ?

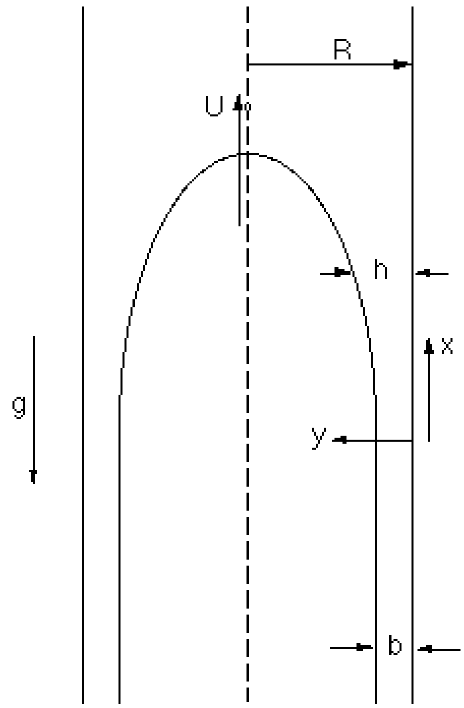

Fig. 5 – *Schéma d'une longue bulle d'air remontant dans un tube rempli de liquide.*

3.2 Tubes de petit diamètre

On considère maintenant la vidange de tubes plus petits (diamètre de l'ordre de quelques mm) remplis de liquides visqueux, toujours fermés à leur extrémité supérieure. Par rapport aux tubes de plus grands diamètres, une première constatation expérimentale est que, si le diamètre du tube est trop petit, le tube ne se vide pas. Pour une huile silicone ($\rho = 980\text{kg/m}^3$, $\gamma = 21$ mN/m, $\eta = 10$ Pa.s), le rayon minimal pour que le tube se vide est $r_c = 1{,}3$ mm.

1. Parmi les nombres sans dimension mentionnés dans le préambule, quel est celui qui gouverne le rayon critique r_c ?
2. Suffisamment loin derrière l'avant de la bulle d'air qui remonte dans le tube à la vitesse U, le liquide s'écoule dans un mince film d'épaisseur b le long de la paroi du tube (fig. 5). On suppose que l'épaisseur b est beaucoup plus petite que le rayon R du tube.
   Montrer que le débit total de liquide s'écoulant dans ce film est :
   $$Q = \frac{2\pi R\rho g b^3}{3\eta}$$
   Montrer que la conservation du volume de liquide conduit à :
   $$\frac{\rho g b^2}{3\eta U} \approx \frac{R}{2b}$$
3. On examine maintenant l'écoulement dans le film d'épaisseur variable h entre le sommet de la bulle et la région où l'épaisseur du film devient constante et égale à b. On note x la coordonnée spatiale le long du tube et y la distance à la paroi solide.
   Montrer que, dans le référentiel où la bulle est fixe, le débit de liquide est, par unité de longueur sur la circonférence du tube :
   $$q = -\frac{h^3}{3\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g\right) - Uh$$

Montrer que, dans la zone où l'épaisseur du film est constante, le débit, toujours dans le réferentiel où la bulle est fixe, est :

$$q = -\frac{b^3}{3\eta}\rho g - Ub$$

4. Montrer que l'épaisseur h du film de liquide est décrite par l'équation :

$$\frac{d^3h}{dx^3} - \frac{\rho g}{\gamma} = \frac{3\eta U}{\gamma h^3}\left(h - b - \frac{\rho g b^3}{3\eta U}\right)$$

Montrer que, si b/R est petit devant l'unité, l'équation d'évolution pour h se réduit à :

$$\frac{d^3h}{dx^3} = \frac{\rho g}{\gamma}\left(1 - \frac{b^3}{h^3}\right)$$

Montrer que l'échelle de longueur λ sur laquelle l'épaisseur h varie de manière appréciable est donnée par :

$$\lambda = b(\rho g b^2/\gamma)^{-1/3}$$

4. Drainage des mousses

Une mousse est un assemblage complexe de bulles de gaz séparées par des films de liquide contenant un surfactant pour abaisser la tension interfaciale. Les mousses sont rencontrées dans la vie courante (détergents, bière, blancs d'œufs battus en neige, ...) et dans l'industrie (produits contre l'incendie, mousses de polymères, ...). Lorsqu'une mousse est soumise à la gravité, le liquide a tendance à s'écouler et la mousse s'assèche progressivement. Ce phénomène est observé, par exemple, dans la mousse de bière. Si la quantité de liquide est assez petite, les bulles de gaz sont polyédriques et séparées par des films liquides minces et plans. Ces films se rejoignent trois par trois en formant des angles de 120 ˚ (la tension de surface est la même sur les trois films). L'essentiel du liquide est emprisonné dans des " bordures de Plateau " formées à l'intersection des films (fig. 6).

Le drainage de la mousse peut être alors décrit comme l'écoulement à travers l'ensemble de canaux triangulaires constitué par les bordures de Plateau. Les dimensions de ces canaux sont définies par la taille moyenne des bulles d'air qui fixe la longueur et le rayon de courbure R qui fixe l'aire A de la section. Il est possible de décrire le drainage de la mousse en considérant que l'ensemble des bordures de Plateau forme un milieu poreux déformable, avec une section moyenne des canaux A qui varie avec l'altitude z.

1. Montrer que la conservation de la masse de liquide conduit à :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (uA)}{\partial z} = 0$$

où u est la vitesse moyenne du liquide dans les bordures de Plateau.

2. Il est possible d'assimiler les bordures à des canaux avec des parois solides mais déformables. Montrer que, dans ces conditions, la vitesse moyenne du fluide s'écrit :

$$u = \frac{\alpha A}{\eta}\left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right)$$

, où η est la viscosité du liquide, α est un coefficient numérique et l'axe z est dirigé vers le bas. Quelle relation existe-t-il entre la pression dans le liquide et l'aire A?

3. Montrer que la relation de conservation de la masse s'écrit finalement :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\alpha \rho g}{\eta}\frac{\partial A^2}{\partial z} - \frac{\alpha\gamma\delta^{1/2}}{2\eta}\frac{\partial}{\partial z}\left(A^{1/2}\frac{\partial A}{\partial z}\right) = 0$$

où γ est la tension superficielle des films composant la mousse et δ est un facteur géométrique tel que $A = \delta R^2$.

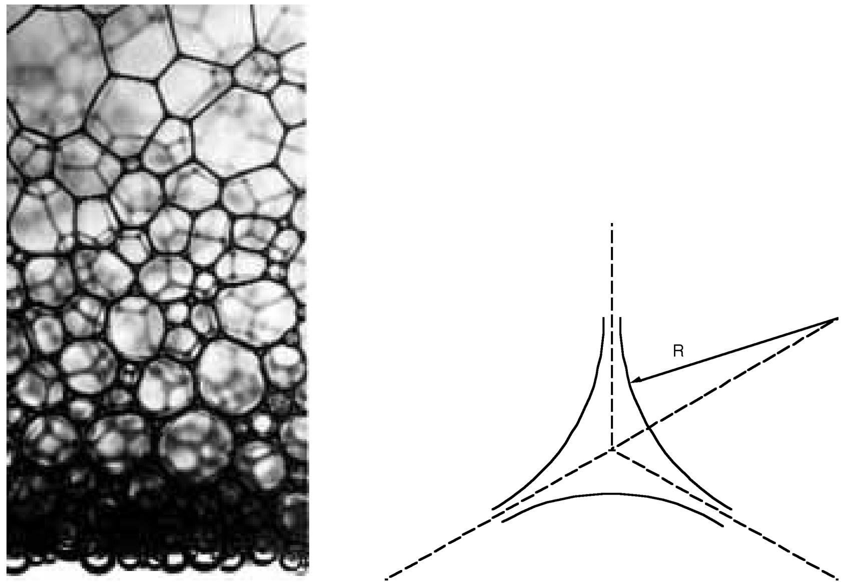

FIG. 6 – *A gauche : Photographie d'une mousse assez sèche. Le liquide est confiné dans les bordures de Plateau qui apparaissent ici comme des lignes sombres entre les bulles. A droite : coupe d'une bordure de Plateau.*

Drainage libre

On peut montrer que la longueur caractéristique pour l'évolution verticale de la section moyenne A est :

$$l = \frac{\gamma \delta^{1/2}}{2\rho g d}$$

où d est la dimension typique des bulles.

1. Écrire la relation de conservation de la masse en normalisant la coordonnée verticale par l et en introduisant une section moyenne des bordures de Plateau sans dimension a, telle que : $A = ad^2$. Montrer que le temps caractéristique apparaissant dans l'équation est :

$$\tau = \frac{\eta \gamma \delta^{1/2}}{2\alpha (\rho g)^2 d^3}$$

et reformuler l'équation d'évolution avec un temps normalisé par τ.

2. Quelles sont les conditions aux limites à imposer à a dans le cas du drainage libre de la mousse (mousse initialement saturée d'eau se drainant spontanément sous l'effet de la gravité) ?