

Mécanique des Milieux Continus

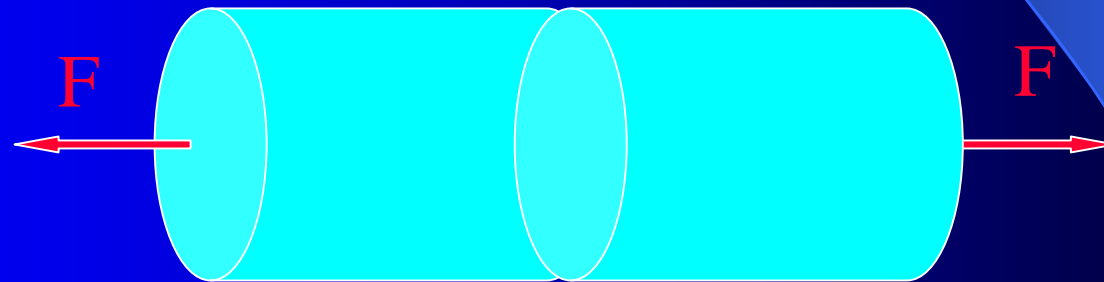
- **I** Milieux Déformables
- **II** Forces de Contact
- **III** Contraintes
- **IV** Loi Fondamentale de la Dynamique
- **V** Déformations
- **VI** Relation Contraintes - Déformation

I Milieux Déformables

- I-1 Forces Externes et Équilibre Mécanique
- I-2 Comportement d'une Structure
- I-3 Raideur et Rigidité



I-1 Forces Externes : Équilibre Mécanique



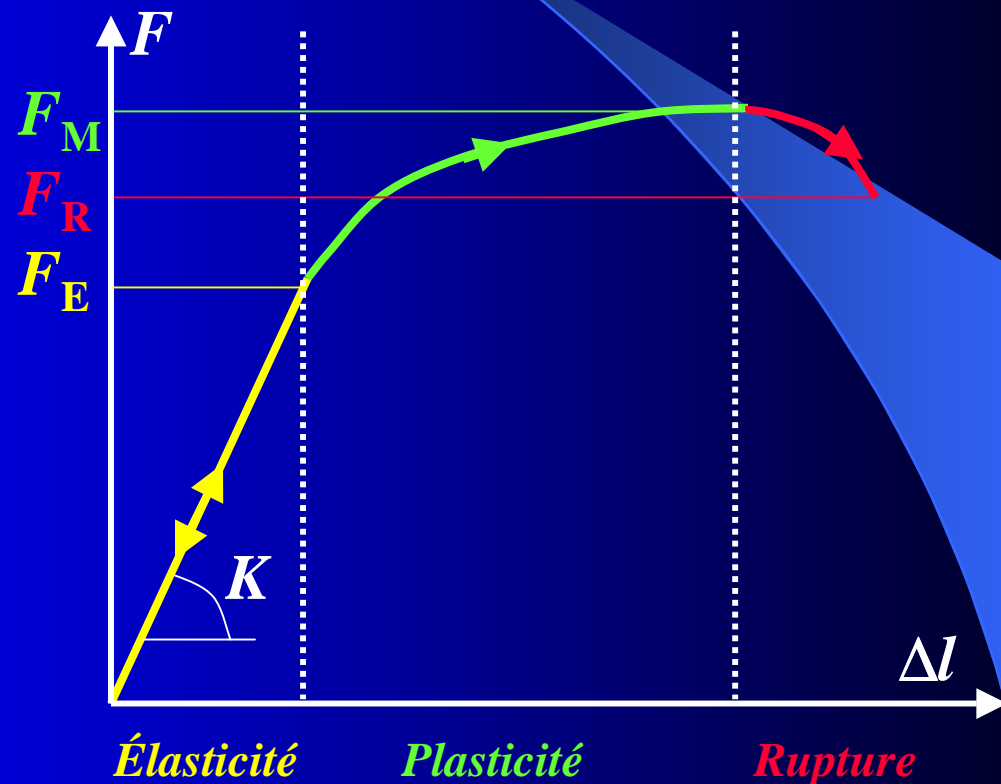
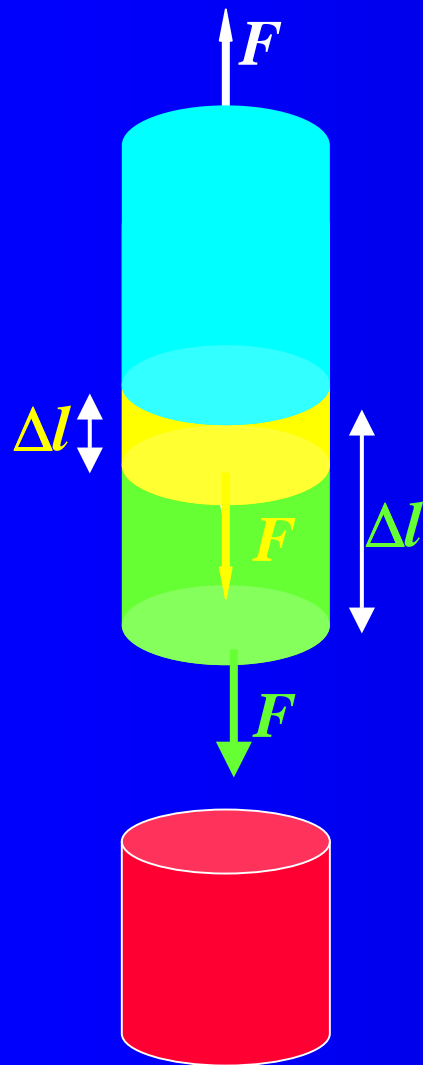
Équilibre des Forces

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Équilibre des Moments

$$\sum \vec{M} = \vec{0}$$

I-2 Comportement d'une Structure : Essai de Traction

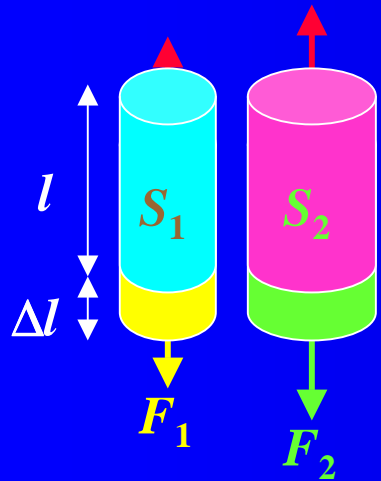


Rigidité de la Structure $F=K\Delta l$

I-3 Raideur et Rigidité :

Géométrie de la Structure et Comportement du Matériau

Rigidité de la Structure $F=K\Delta l$

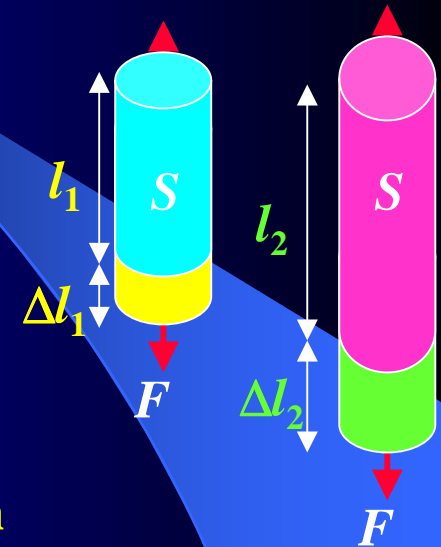


$F \sim S \Leftrightarrow$ Expérience $\Rightarrow \Delta l \sim l$

$$K \sim S$$

$$K \sim \frac{1}{l}$$

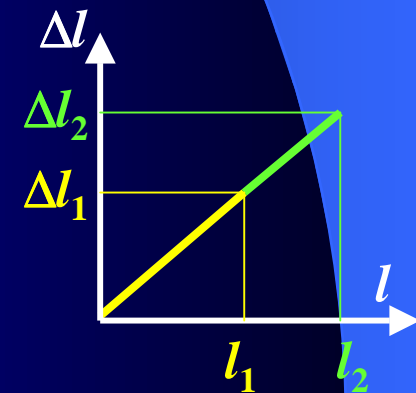
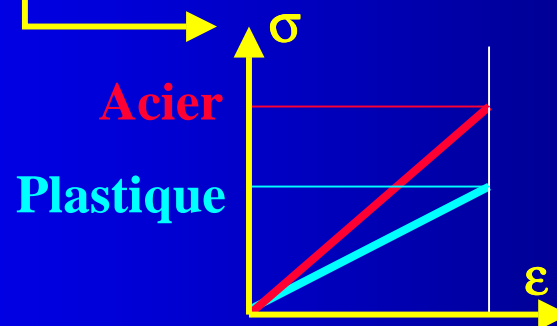
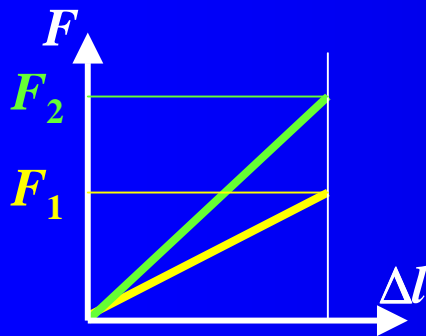
$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$



Contrainte

Déformation

Raideur du Matériau

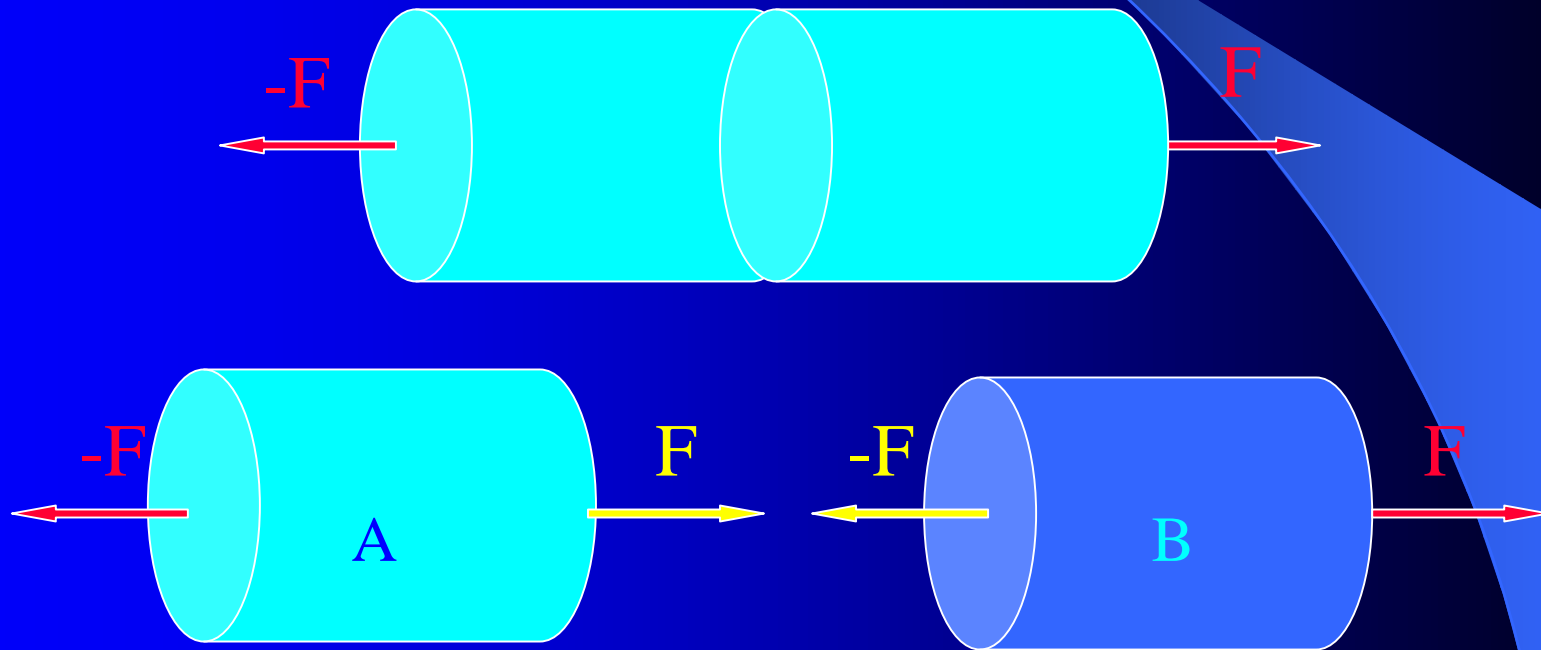


II Forces de Contact

- II-1 Forces Internes : Action et Réaction
- II-2 Forces Internes : Répartition Homogène
- II-3 Forces Internes : Répartition non Homogène
- II-4 Vecteur Contrainte : État Local

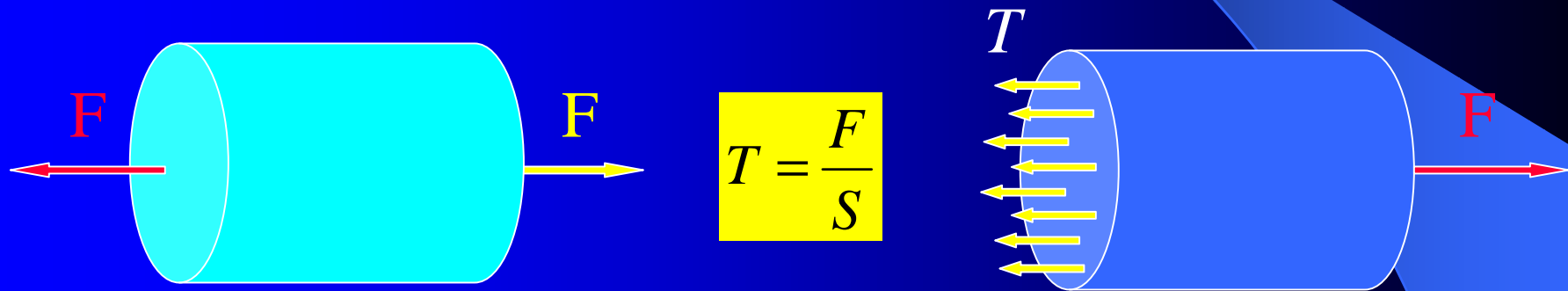


II-1 Forces Internes : Action et Réaction



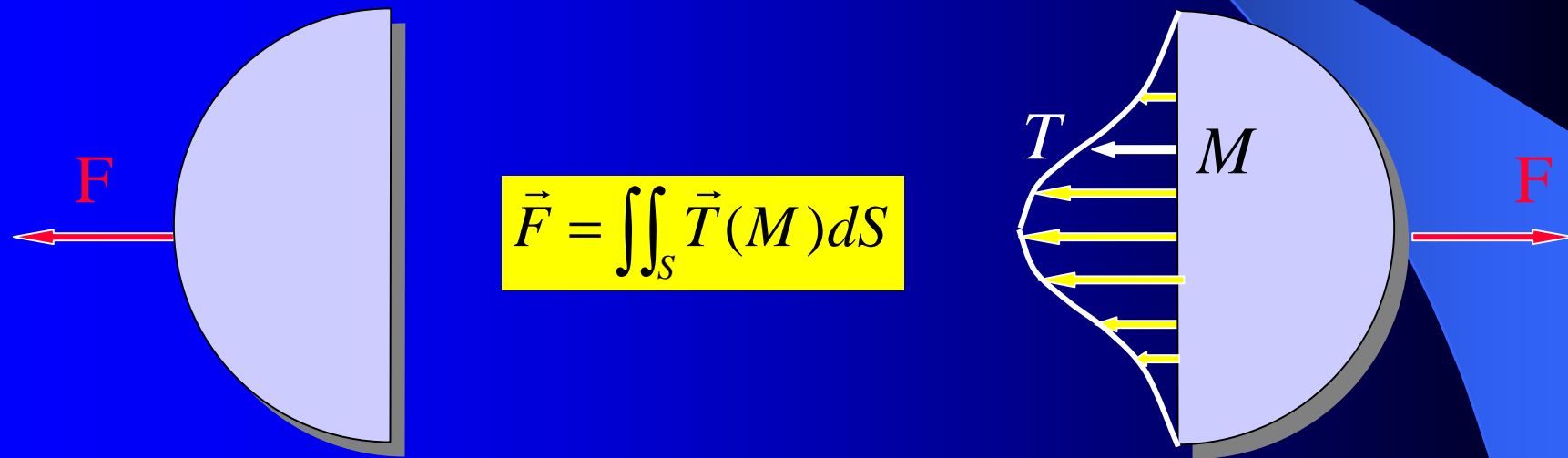
$F_{(A/B)} = -F_{(B/A)}$ La Résultante des Forces Internes est toujours Nulle

II-2 Forces Internes : Répartition Homogène



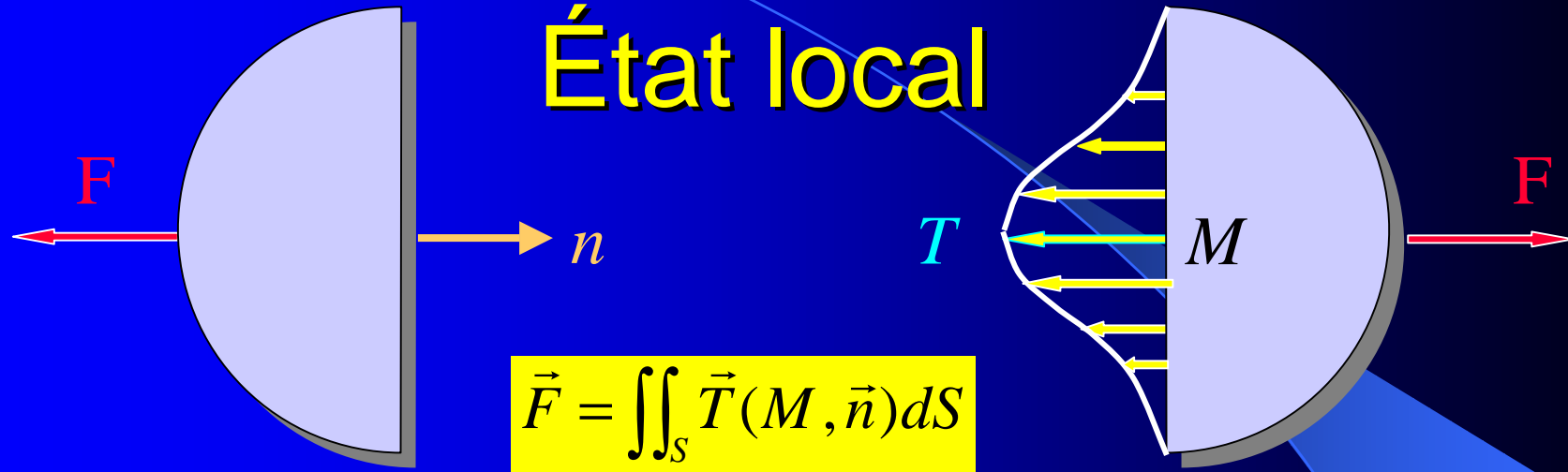
Le Vecteur Contrainte T
Force par unité de Surface [MPa]
est indépendant du point dans la section S

II-3 Forces Internes : Répartition non Homogène

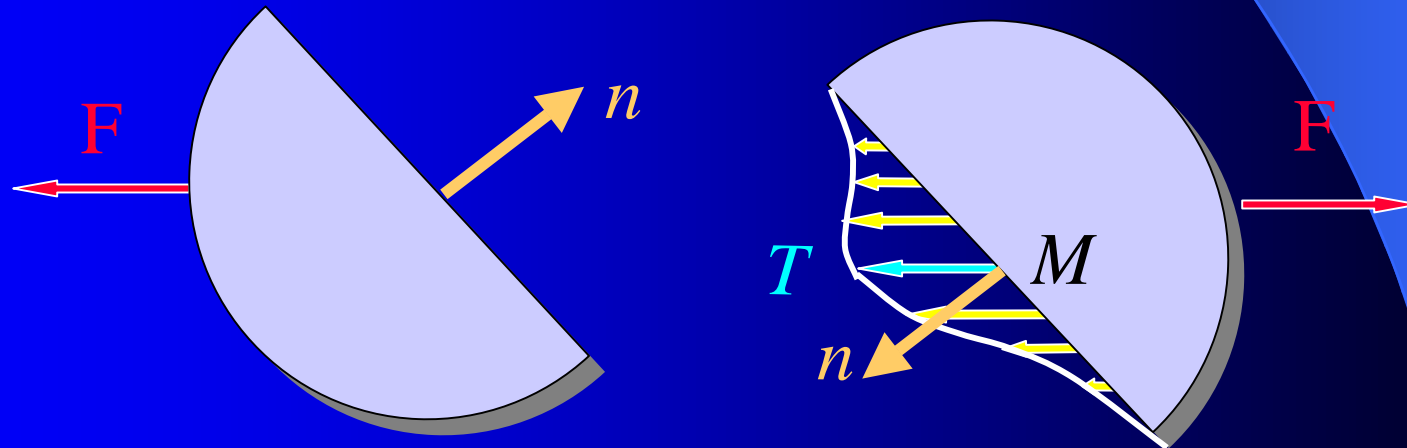


Le Vecteur Contrainte T dépend
du point M dans la section S

II-4 Vecteur Contrainte : État local



$$\vec{F} = \iint_S \vec{T}(M, \vec{n}) dS$$



T dépend : du point M dans la section S
: de l'orientation n de la section S

III Contraintes

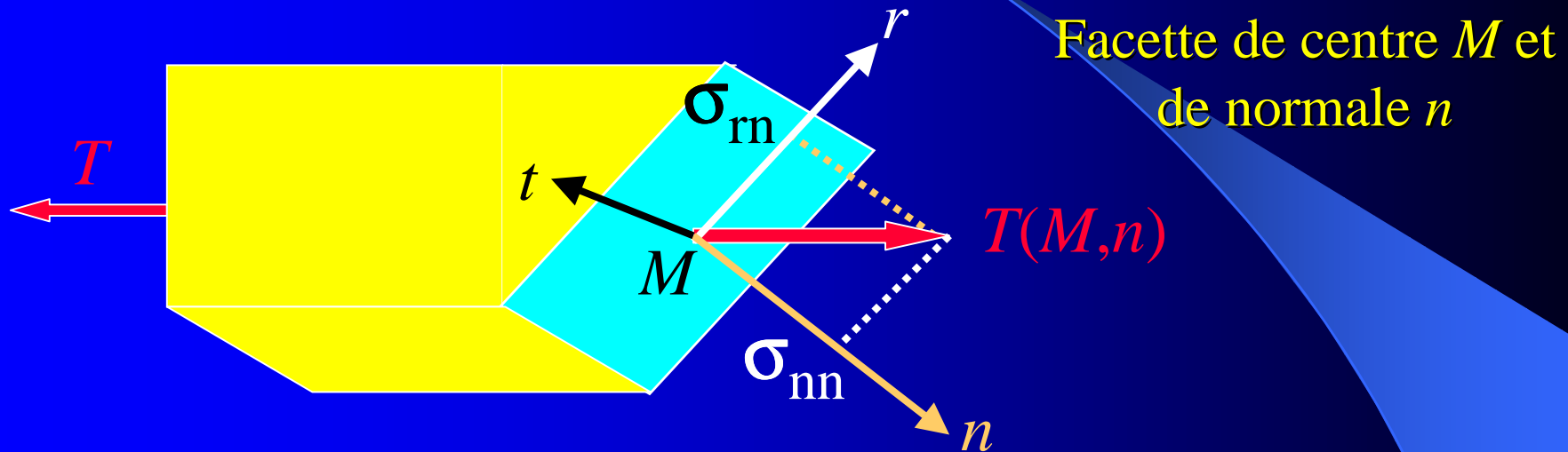
- **III-1** Tenseur des Contraintes
- **III-2** Représentation des Contraintes



III-1 Tenseur des Contraintes

- III-1.1 Repère local : Traction, Cisaillement
- III-1.2 Tenseur des Contraintes : Définition
- III-1.3 Tenseur des Contraintes : Symétrie
- III-1.4 Contraintes Principales et Axes Propres
- III-1.5 Sollicitations Principales
- III-1.6 Invariants du Tenseur des Contraintes
- III-1.7 Sphérique et Déviateur des Contraintes

III-1.1 Tenseur des Contraintes : Repère Local



n, r, T coplanaires

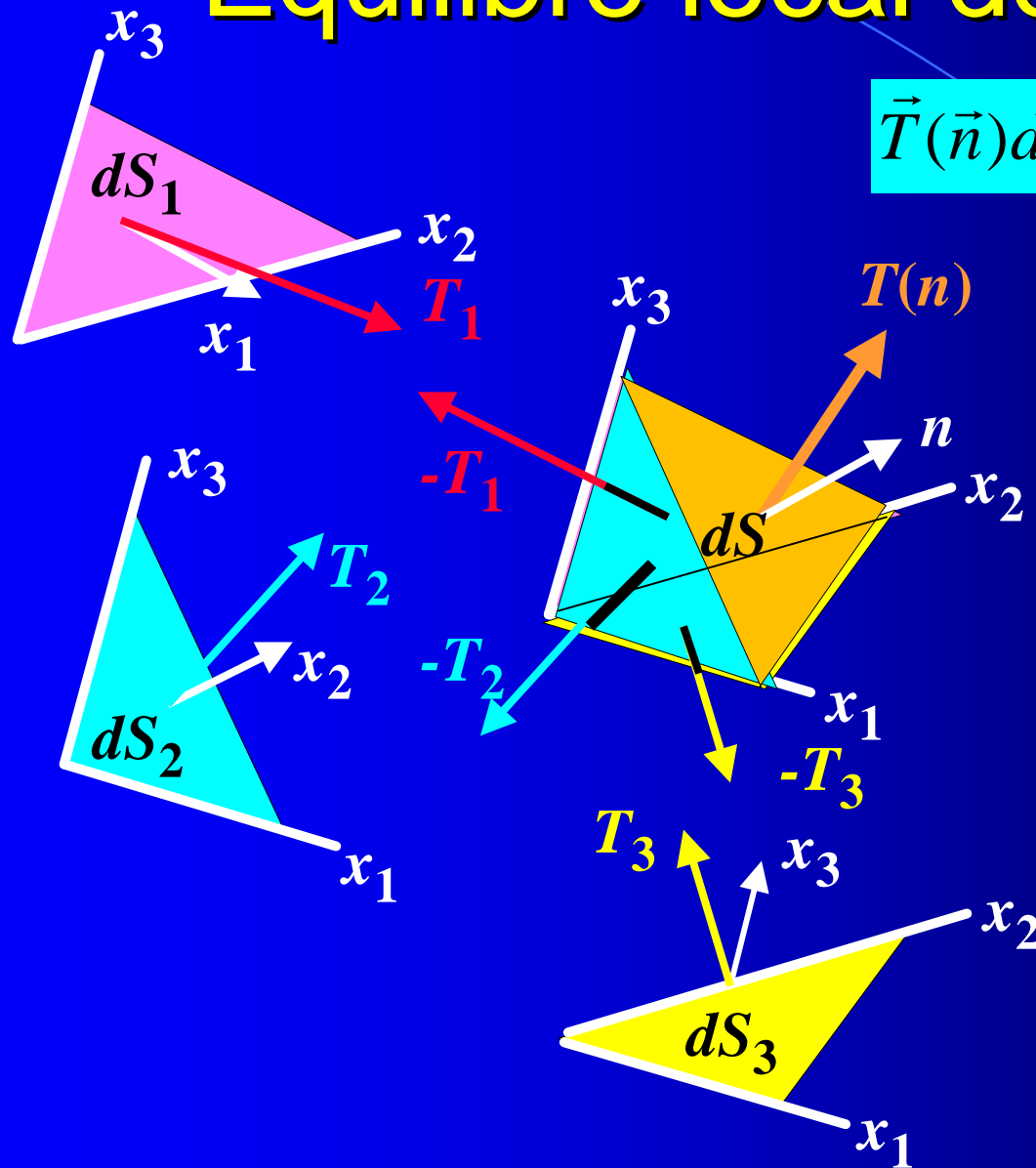
Trièdre local **direct** n, r, t

$$\sigma_{nn} = T \cdot n \quad \text{Traction} > 0 \quad \text{Compression} < 0$$

$$\sigma_{rn} = T \cdot r \quad \text{Cisaillement}$$

$$\sigma_{tn} = T \cdot t = 0$$

III-1.2 Tenseur des Contraintes : Équilibre local des Forces



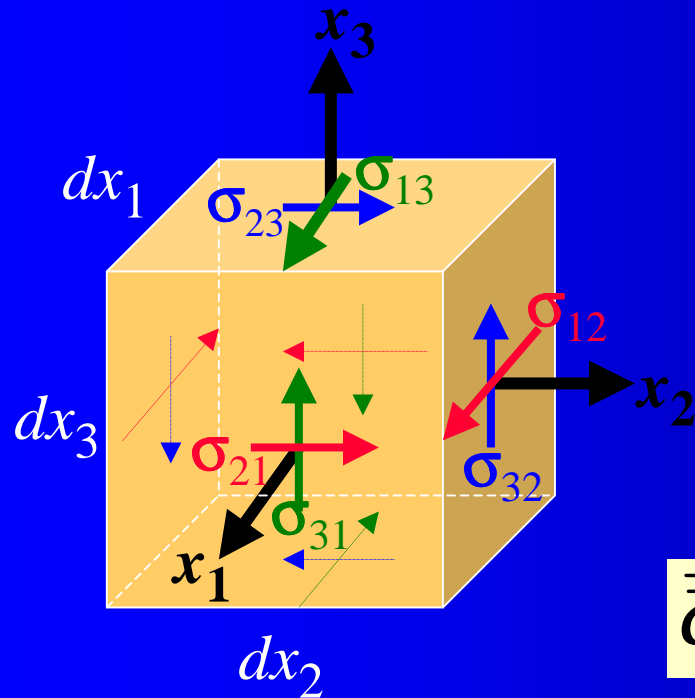
$$\vec{T}(\vec{n})dS = \vec{T}_1dS_1 + \vec{T}_2dS_2 + \vec{T}_3dS_3$$

$$\vec{T}(\vec{n}) = \begin{vmatrix} \vec{T}_1 & \vec{T}_2 & \vec{T}_3 \\ \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}(M) \bullet \vec{n}$$

$$T_i = \sigma_{ij}n_j$$

III-1.3 Tenseur des Contraintes : Équilibre local des Moments



$$\sigma_{21} dx_2 dx_3 dx_1 = \sigma_{12} dx_3 dx_1 dx_2$$

$$\sigma_{31} dx_3 dx_2 dx_1 = \sigma_{13} dx_2 dx_1 dx_3$$

$$\sigma_{32} dx_3 dx_1 dx_2 = \sigma_{23} dx_1 dx_2 dx_3$$

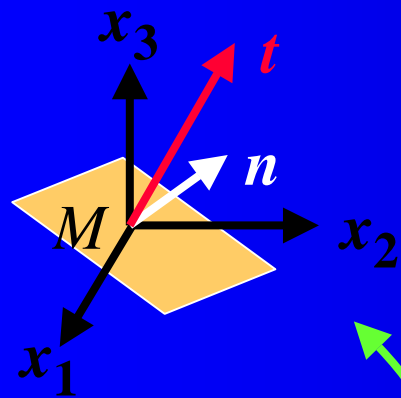
$\bar{\bar{\sigma}}(M)$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Le Tenseur des Contraintes σ est Symétrique

III-1.4 Tenseur des Contraintes : Contraintes Principales et Axes Propres

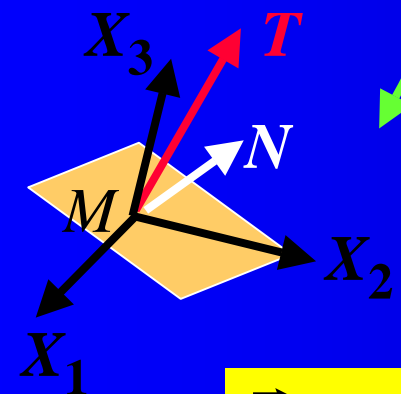


$$\overline{\overline{\sigma}}(M)$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$$\vec{t} = \overline{\overline{\sigma}} \vec{n}$$

$$\vec{n} = {}^t A \vec{N}$$



$$\overline{\overline{\Sigma}}(M)$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{III} \end{vmatrix}$$

$$\vec{T} = \overline{\overline{\Sigma}} \vec{N}$$

$$\vec{T} = A \vec{t}$$

$$\vec{T} = A \vec{t}$$

$$= A \overline{\overline{\sigma}} \vec{n}$$

$$= A \overline{\overline{\sigma}} {}^t A \vec{N}$$

$$= \overline{\overline{\Sigma}} \vec{N}$$

$$\overline{\overline{\Sigma}}(M) = A \overline{\overline{\sigma}}(M) {}^t A$$

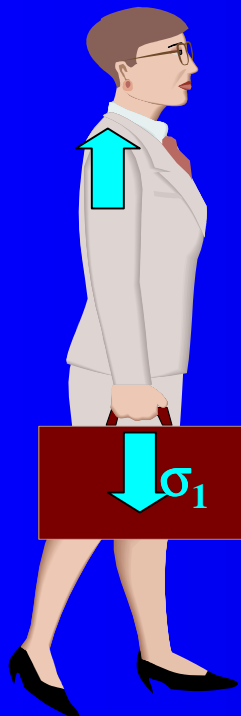
$$\Sigma_{ii} = a_{ij} \sigma_{jk} a_{kl}$$

III-1.5 Tenseur des Contraintes :

Sollicitations Principales Traction - Compression

Uniaxiale

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



Biaxiale

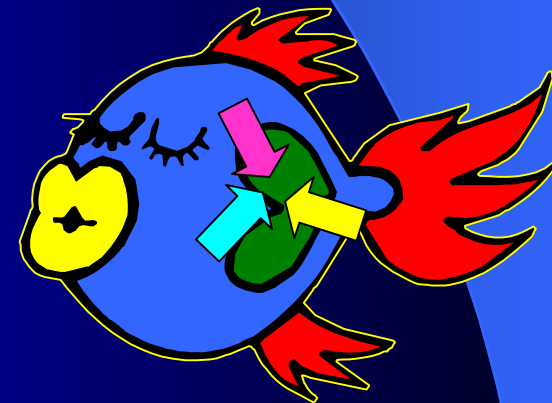
$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

Triaxiale

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$



$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$$

Hydrostatique

$$\begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p \bar{\bar{\delta}}$$

III-1.6 Tenseur des Contraintes : Les Invariants Tensoriels

$$\overline{\overline{\Sigma}}(M) \begin{vmatrix} \Sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{III} \end{vmatrix} \quad \overline{\overline{\sigma}}(M) \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_1 = \Sigma_I + \Sigma_{II} + \Sigma_{III} = \sigma_{kk} = 3 \sigma_m = \text{Tr}(\sigma)$$

$$I_2 = \Sigma_I \Sigma_{II} + \Sigma_{II} \Sigma_{III} + \Sigma_{III} \Sigma_I = (\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2) + (\sigma_{11} \sigma_{33} - \sigma_{13}^2) + (\sigma_{22} \sigma_{33} - \sigma_{23}^2)$$

$$I_3 = \Sigma_I \Sigma_{II} \Sigma_{III} = \text{Det}(\sigma)$$

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

Caley-Hamilton

$$\overline{\overline{\sigma}}^3 - I_1 \overline{\overline{\sigma}}^2 + I_2 \overline{\overline{\sigma}} - I_3 \overline{\overline{\delta}} = \overline{\overline{0}}$$

6 Composantes = 3 (Invariants ou Valeurs Propres) + 3 Angles d'Euler

III-1.7 Tenseur des Contraintes : Sphérique et Déviateur

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}} = \begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{vmatrix}$$

$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{Tr}(\overline{\overline{\sigma}})$

$\sigma_d^2 = \frac{1}{3} \text{Tr}(\overline{\overline{D}}^2)$

Sphérique S $\text{Tr}(S) = \text{Tr}(\sigma)$

Déviateur D $\text{Tr}(D) = 0$

σ_m Contrainte Normale Moyenne (Traction ou Compression)

σ_d Contrainte Déviatorique Moyenne (Cisaillement)

π Tenseur des Directions $\text{Tr}(\pi) = 0$ et $\text{Tr}(\pi^2) = 3$

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}} = \sigma_m \overline{\overline{\delta}} + \sigma_d \overline{\overline{\pi}} = \sigma_m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \sigma_d \begin{vmatrix} \pi_1(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \pi_2(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \pi_3(\mu) \end{vmatrix}$$

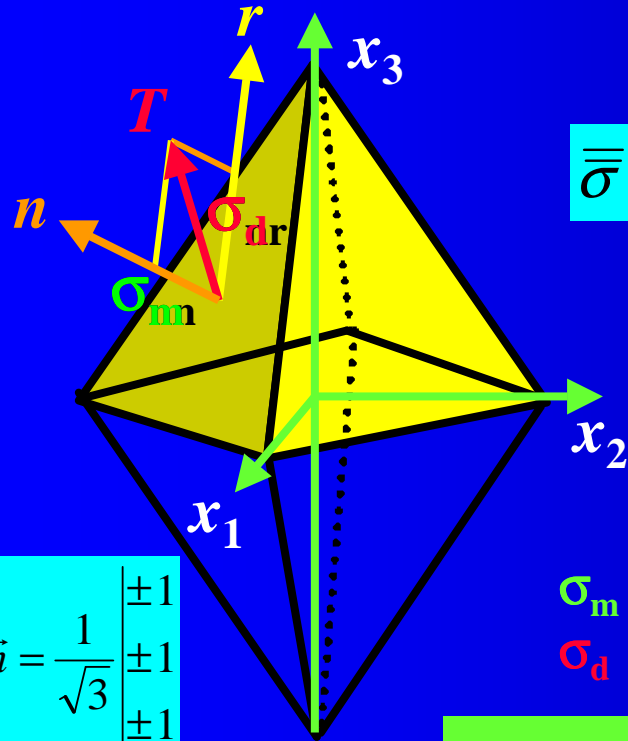
6 Composantes = $\sigma_m + \sigma_d + \mu + 3$ Angles d'Euler

III-2 Représentation des Contraintes

- III-2.1 Contraintes Octaédriques
- III-2.2 Espace des Contraintes
- III-2.3 Critères de Plasticité et de Rupture
- III-2.4 Ellipsoïde des Contraintes
- III-2.5 Cercle de Mohr Principal
- III-2.6 Cercles de Mohr
- III-2.7 Cisaillement Simple

III-2.1 Représentation des Contraintes :

Contraintes Octaédriques



$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}} = \sigma_m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{vmatrix}$$

Sphérique **S** $\text{Tr}(\mathbf{S}) = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})$ Déviateur **D** $\text{Tr}(\mathbf{D}) = 0$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{Tr}(\overline{\overline{S}})$$

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{3} \text{Tr}(\overline{\overline{D}}^2)$$

σ_m Contrainte Normale Moyenne (Traction ou Compression)
 σ_d Contrainte Déviatorique Moyenne (Cisaillement)

$$\sigma_{nn} = \vec{n} \cdot \vec{T} = \vec{n} \overline{\overline{S}} \vec{n} + \vec{n} \overline{\overline{D}} \vec{n} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\overline{\overline{S}}) + \frac{1}{3} \text{Tr}(\overline{\overline{D}}) = \sigma_m$$

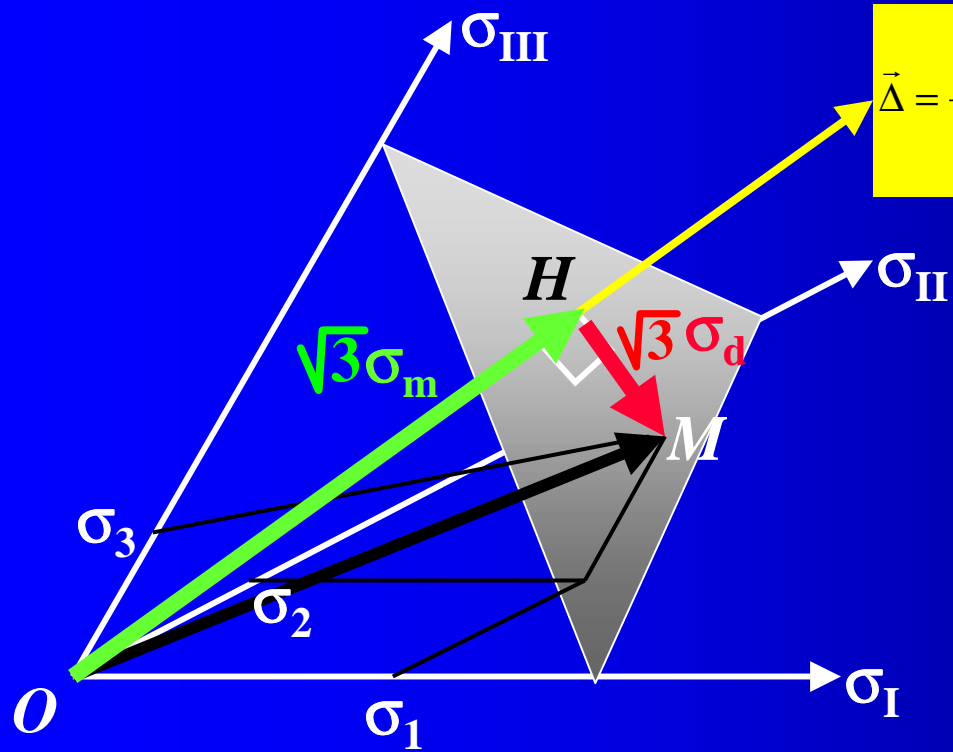
$$\sigma_{nn} = \sigma_m$$

$$\sigma_{nr}^2 = \vec{T} \cdot \vec{T} - \sigma_{nn}^2 = \vec{n} (\overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}})^2 \vec{n} - \sigma_m^2 = \vec{n} (\overline{\overline{S}}^2) \vec{n} + 2\vec{n} (\overline{\overline{S}} \overline{\overline{D}}) \vec{n} + \vec{n} (\overline{\overline{D}}^2) \vec{n} - \sigma_m^2$$

$$= \frac{1}{3} \text{Tr}(\overline{\overline{S}}^2) + 2\sigma_m \text{Tr}(\overline{\overline{D}}) + \frac{1}{3} \text{Tr}(\overline{\overline{D}}^2) - \sigma_m^2 = \sigma_d^2$$

$$\sigma_{nr} = \sigma_d$$

III-2.2 Représentation des Contraintes : Espace des Contraintes



$$\vec{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$O\vec{H} \cdot H\vec{M} = 0$$

$$O\vec{M} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Sphérique

$$\|O\vec{H}\|^2 = \text{Tr}(\overline{\overline{S}}^2)$$

$$O\vec{H} = \begin{pmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{pmatrix}$$

+

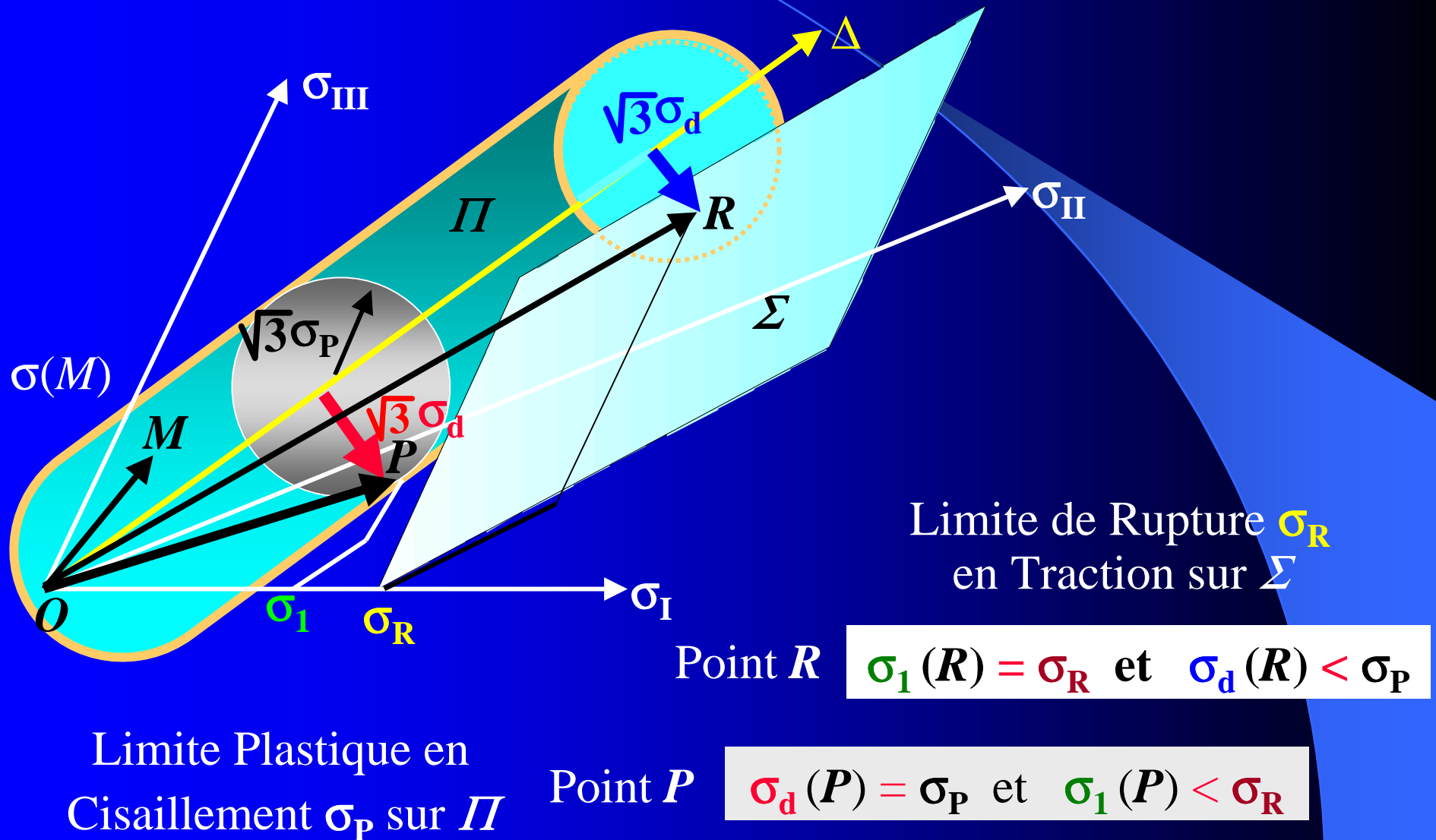
Déviateur

$$\|H\vec{M}\|^2 = \text{Tr}(\overline{\overline{D}}^2)$$

$$H\vec{M} = \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_m \\ \sigma_2 - \sigma_m \\ \sigma_3 - \sigma_m \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

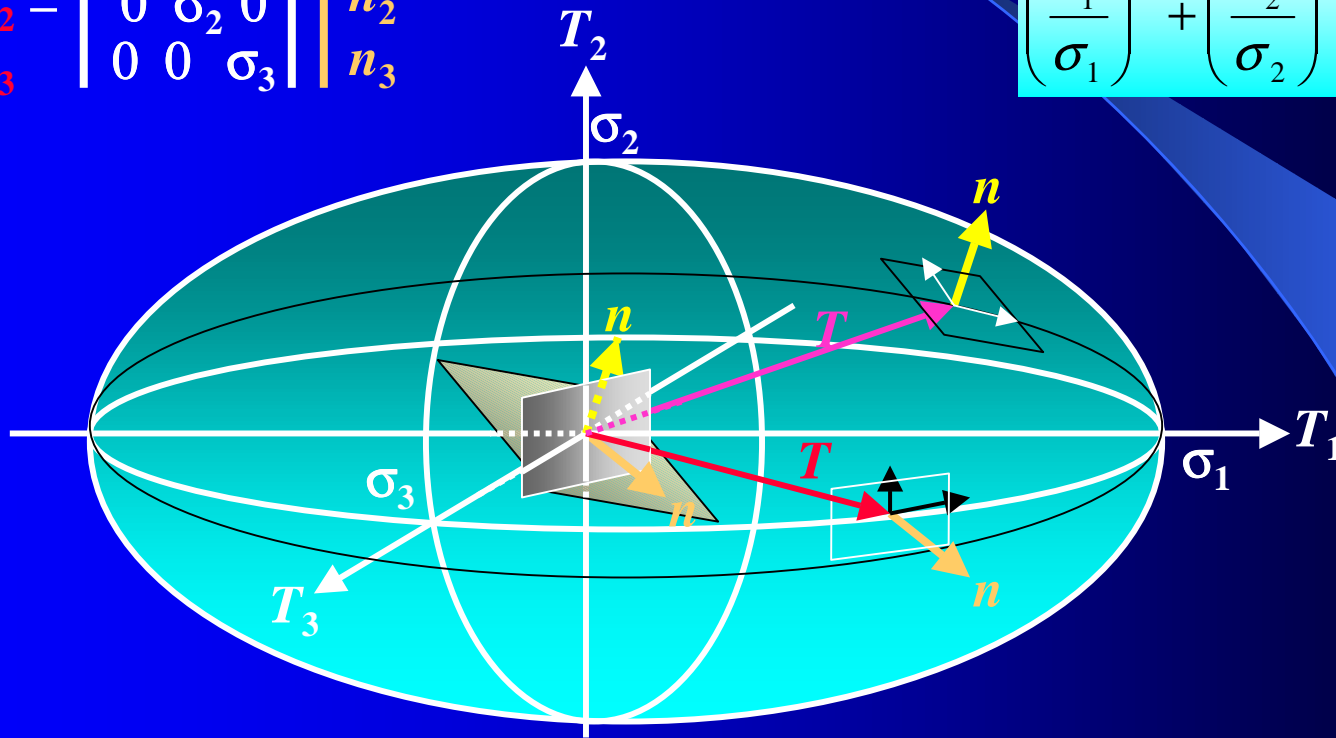
III-2.3 Représentation des Contraintes : Critères de Plasticité et de Rupture



III-2.4 Représentation des Contraintes : Ellipsoïde des Contraintes

$$\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{matrix}$$

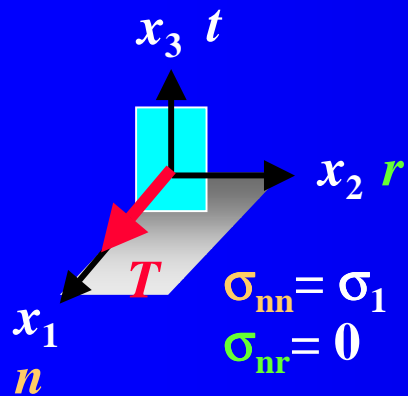
$$\left(\frac{T_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{T_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{T_3}{\sigma_3}\right)^2 = 1$$



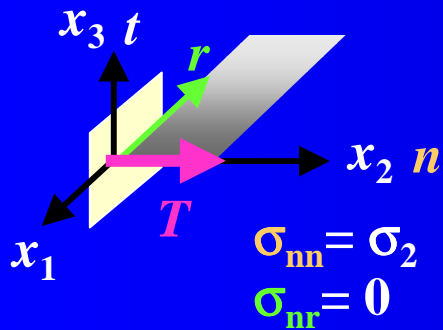
Lorsque n appartient à un plan principal, T appartient au même plan

III-2.5 Représentation des Contraintes : Cercle de Mohr Principal

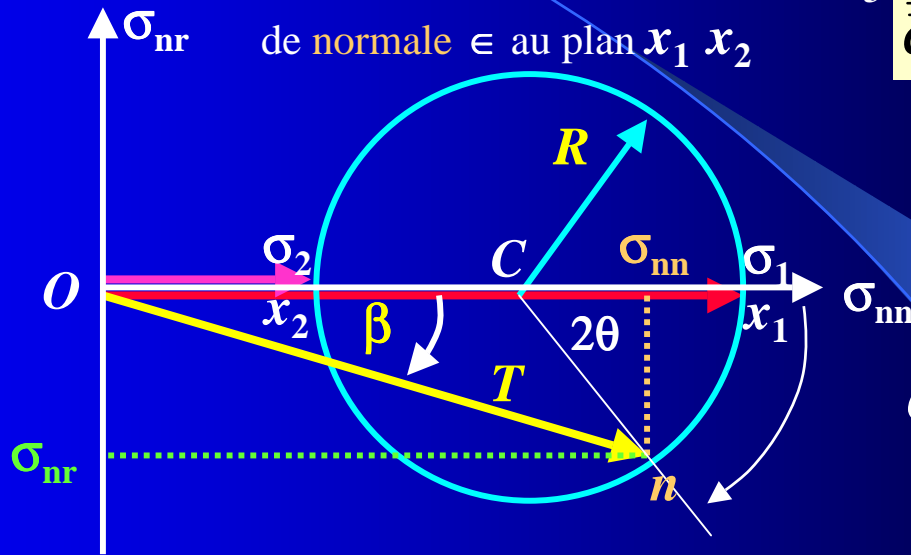
Facette de normale x_1



Facette de normale x_2



Facettes contenant la direction principale x_3
de normale ϵ au plan $x_1 x_2$

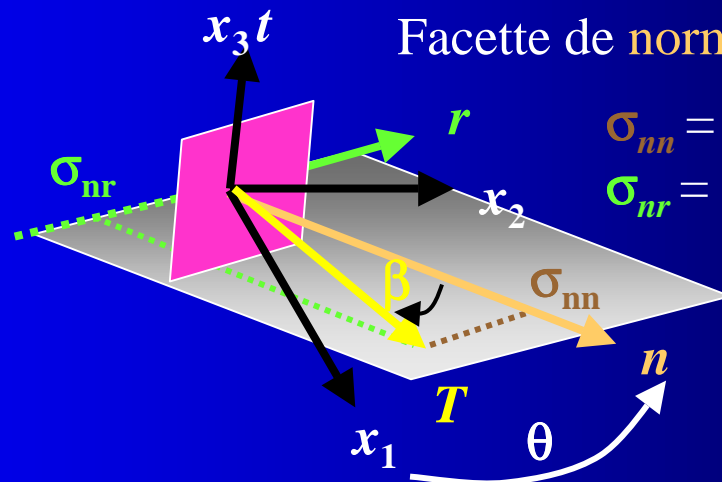


$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$OC = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Facette de normale n

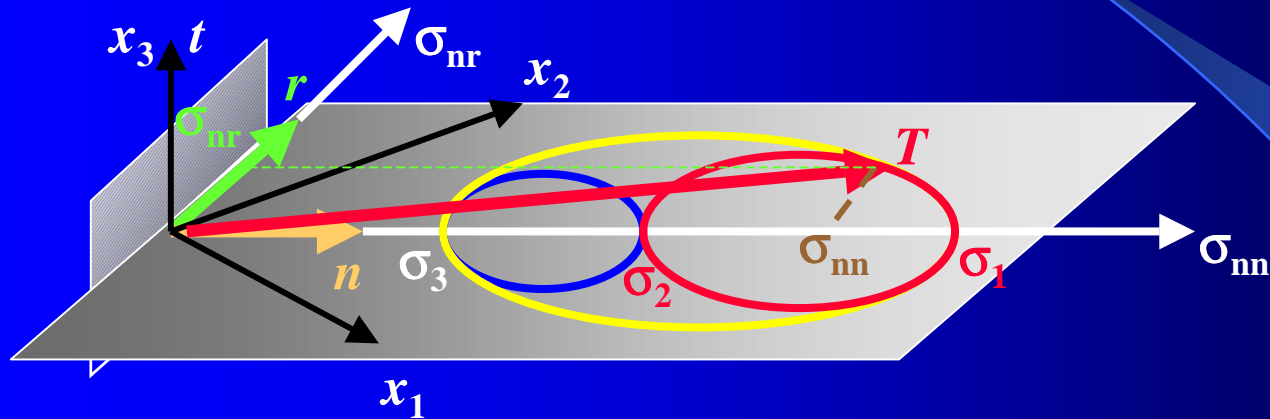


$$\sigma_{mn} = T \cdot n = n \cdot \sigma n = OC + R \cos 2\theta$$

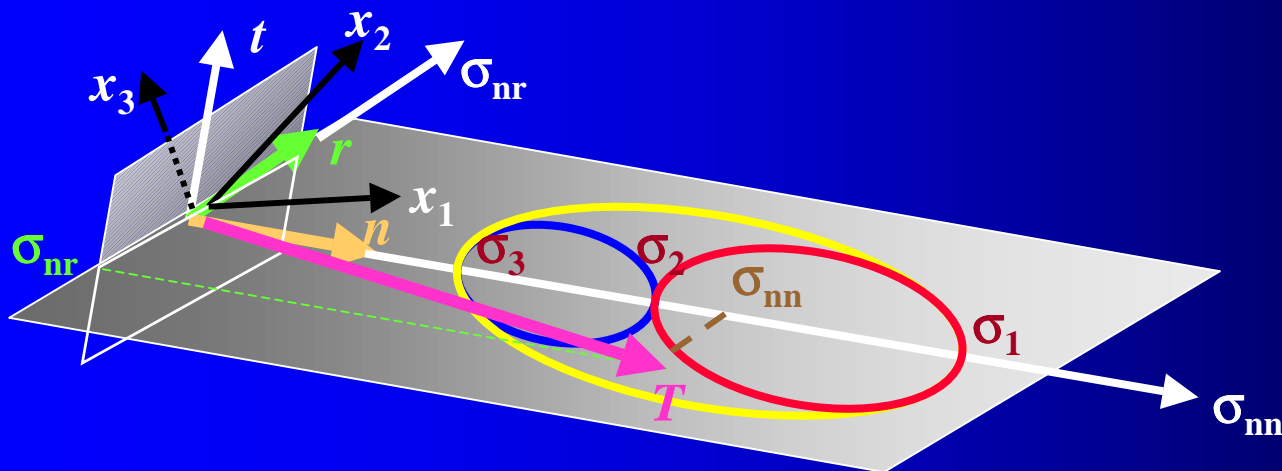
$$\sigma_{nr} = T \cdot r = n \cdot \sigma r = -R \sin 2\theta$$

III-2.6 Représentation des Contraintes : Cercles de Mohr

Facette dont la normale n appartient à un plan principal ($x_1 x_2$)



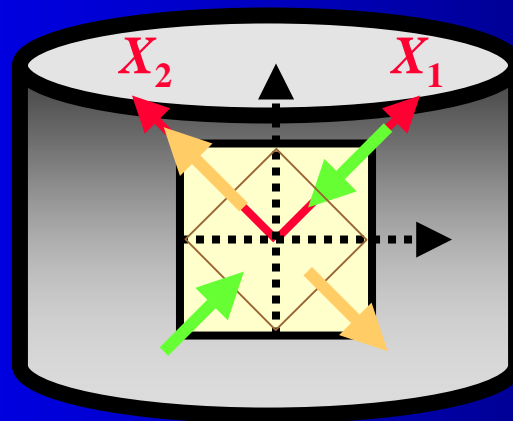
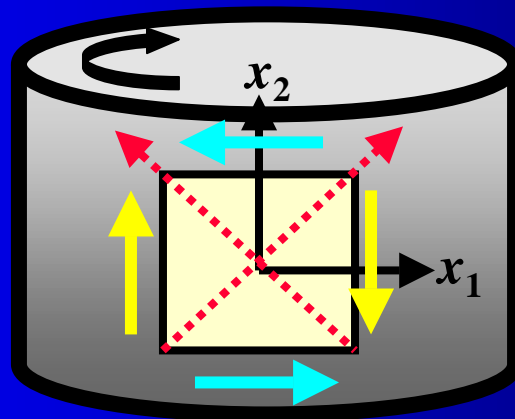
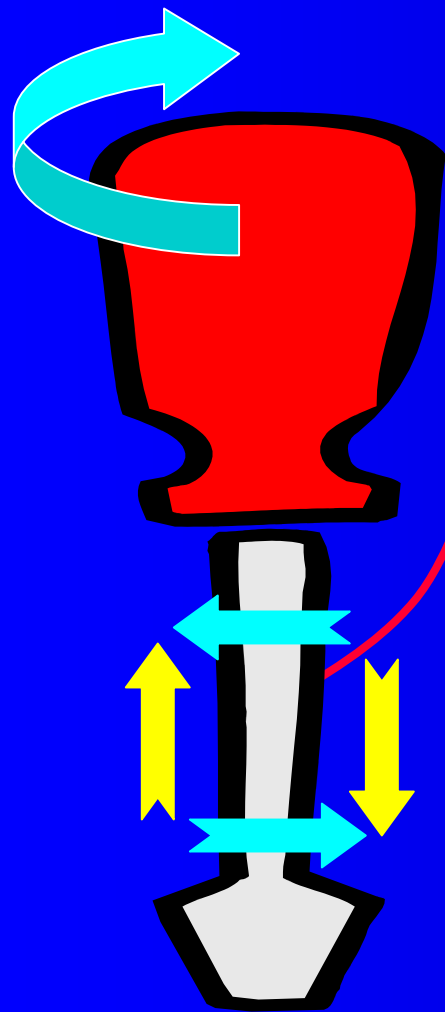
Facette dont la normale n n'appartient pas à un plan principal



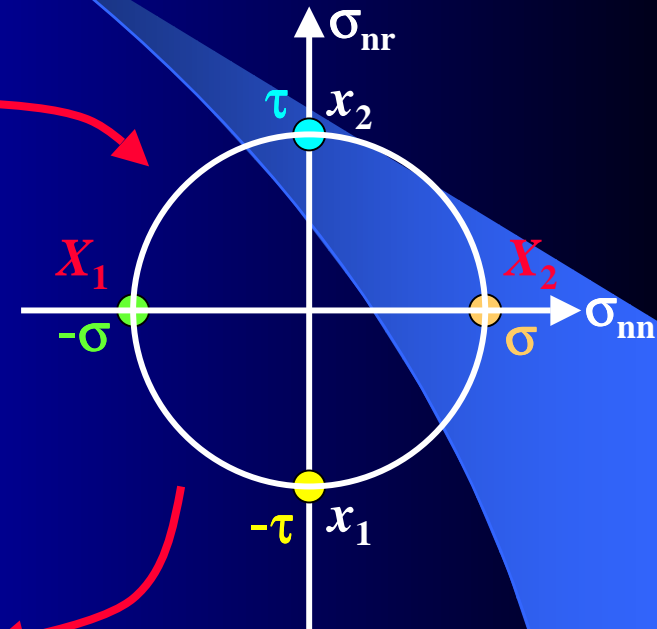
$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

III-2.7 Représentation des Contraintes :

Cisaillement Simple



$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{vmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

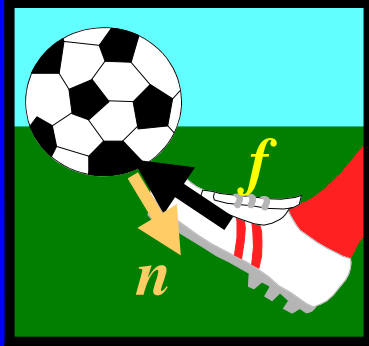
Le **cisaillement** est **maximal** sur les facettes orientées à **45°** des **facettes principales**

IV Loi Fondamentale de la Dynamique

- IV-1 Conditions aux Limites
- IV-2 Bilan des Forces : Équilibre Dynamique
- IV-2 Équation de l'Équilibre Dynamique
- IV-3 Exemple : Prisme pesant
- IV-4 Application : Optimisation en Compression



IV-1 Loi Fondamentale de la Dynamique : Conditions aux Limites

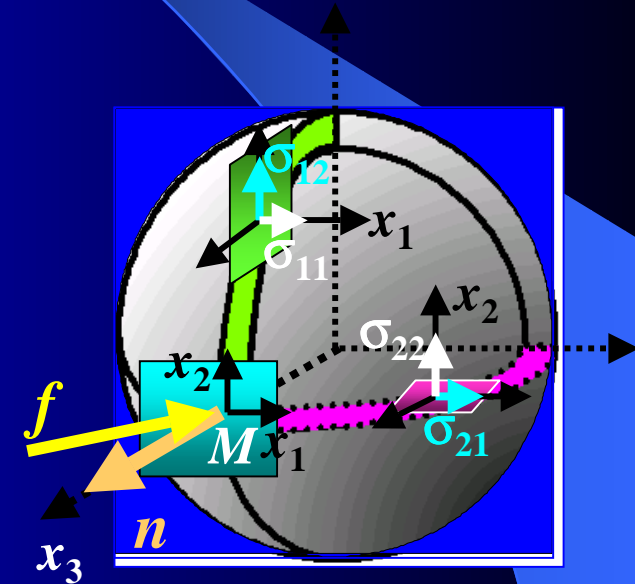


Au Point M de la Surface :

$$\overline{\overline{\sigma}}(M)\vec{n} = \vec{f}(M)$$

- n Normale Extérieure
- f Force Extérieure Appliquée (/ unité de surface)

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & f_1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

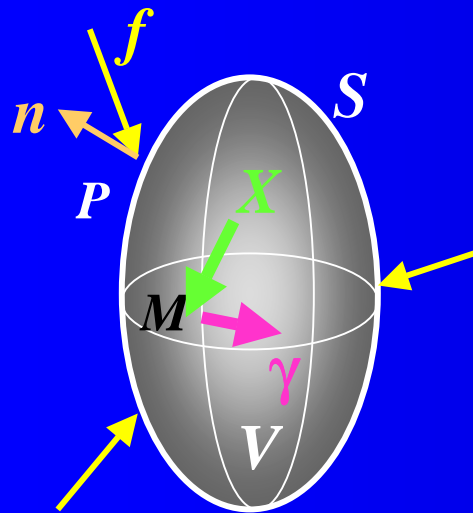


$$f = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La normale n à une surface *libre de charge* est *direction principale* à valeur propre = 0

IV-2 Loi Fondamentale de la Dynamique :

Bilan des Forces : Équilibre Dynamique



Au Point P en Surface :

$$\overline{\overline{\sigma}}(P)\vec{n} = \vec{f}(P)$$

- n Normale Extérieure
- f Force Extérieure Appliquée (/ **unité de surface**)

Au Point M en Volume :

- γ Accélération (**force / unité de masse**)
- X Force Extérieure Appliquée (/ **unité de masse**)

$$m\Gamma = \Sigma F \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \rho \vec{\gamma} dV = \iiint_V \rho \vec{X} dV + \iint_S \vec{f} dS$$

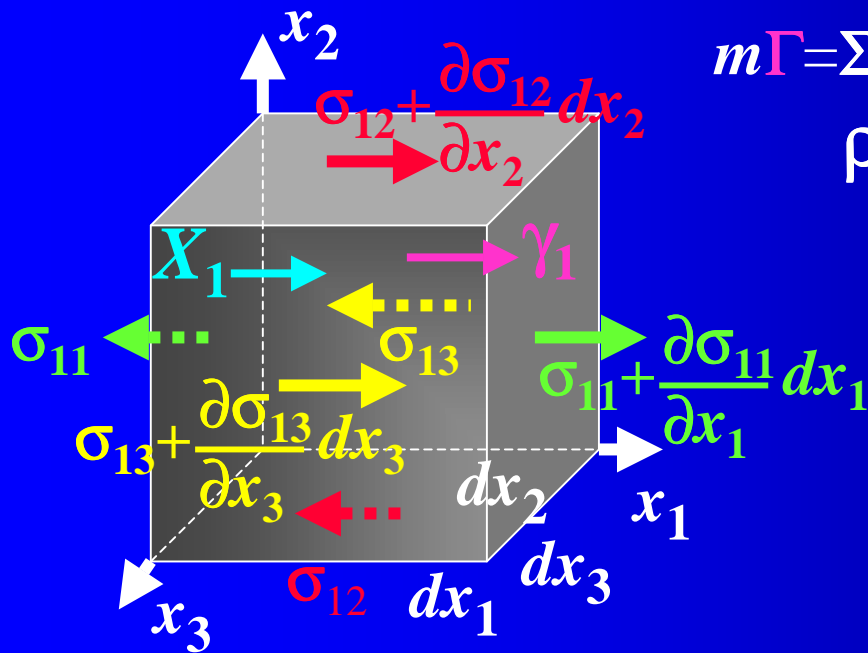
$$\iint_S \vec{f} dS = \iint_S \overline{\overline{\sigma}} \vec{n} dS = \iiint_V \text{Div}_D \overline{\overline{\sigma}} dV$$

Conditions aux Limites

Théorème de la Divergence

$$\text{Div}_D \overline{\overline{\sigma}} + \rho \vec{X} = \rho \vec{\gamma}$$

IV-3 Loi Fondamentale de la Dynamique : Équilibre Dynamique : $\text{Div}_D \sigma$



$m\Gamma = \Sigma F$ projection des Forces sur l'axe x_1

$$\rho \gamma_1 dx_1 dx_2 dx_3 = \rho X_1 dx_1 dx_2 dx_3$$

$$+ (\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 - \sigma_{11}) dx_2 dx_3$$

$$+ (\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 - \sigma_{12}) dx_1 dx_3$$

$$+ (\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 - \sigma_{13}) dx_1 dx_2$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho X_1 = \rho \gamma_1$$

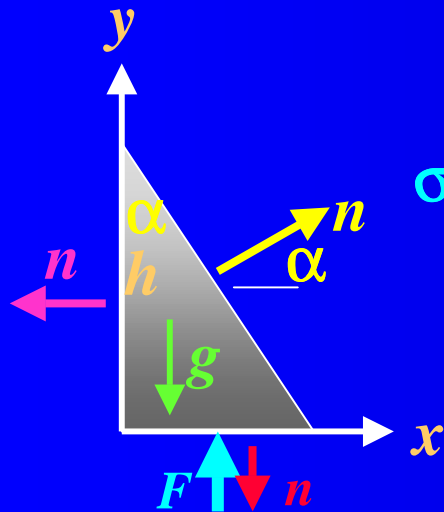
$$\text{Div}_D \sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Div}_D \sigma + \rho X = \rho \gamma$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = \rho \gamma_i$$

IV-4 Loi Fondamentale de la Dynamique :

Exemple : Prisme pesant



$$\sigma(x,y) = \begin{vmatrix} ax+by+r & kx+ly+t \\ kx+ly+t & cx+dy+s \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} ax & kx \\ kx & cx+dy+s \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & kx \\ kx & cx+dy+s \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\rho g(h-x \cot \alpha - y) \end{vmatrix}$$

C.L. en $x=0$: $\sigma(0,y)n=0 \quad \forall y$

$$\begin{vmatrix} by+r & ly+t \\ ly+t & dy+s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b=1=0 \\ r=t=0 \end{matrix}$$

Équilibre Statique : $\text{Div}_D \sigma + \rho X = 0$

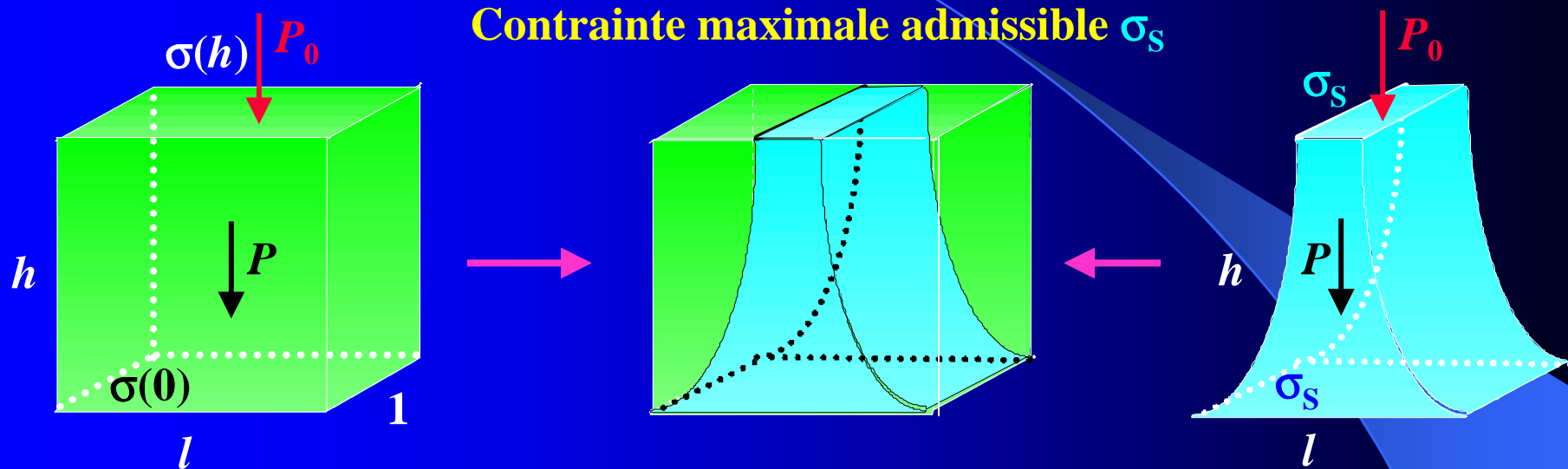
$$\begin{vmatrix} a \\ k+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho g \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ k+d = \rho g \end{matrix}$$

C.L. en $y=h-x \cot \alpha$: $\sigma(x,y)n=0$

$$\begin{vmatrix} 0 & kx \\ kx & cx+dy+s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} k=0, d = \rho g \\ s = -\rho g h \\ c = \rho g \cot \alpha \end{matrix}$$

C.L. en $y=0$: $F = \int_0^{htg\alpha} \sigma(x,0)n dx = \rho g \int_0^{htg\alpha} \begin{vmatrix} 0 \\ (h-x \cot \alpha) \end{vmatrix} dx = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \rho g h htg\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ P \end{vmatrix}$

IV-5 Loi Fondamentale de la Dynamique : Application : Optimisation en Compression



$$\sigma(h) = \frac{P_0}{l} < \sigma_s$$

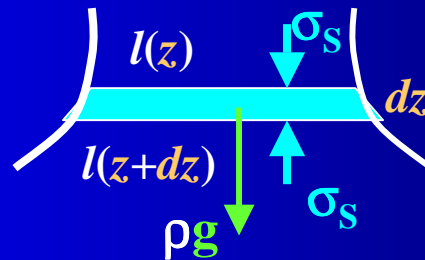
$$P = \rho g h l$$

$$\sigma(0) = \frac{P_0 + P}{l} = \sigma_s$$

$$\sigma(0) = \sigma(h) + \rho g h$$

Profil évolutif

Équilibre de la tranche dz



$$\sigma_s l(z) + \rho g l(z) dz = \sigma_s l(z+dz)$$

$$\sigma(h) = \sigma(0) = \sigma_s$$

$$l(z) = l e^{-\frac{\rho g}{\sigma_s} z}$$

V Déformations

- V-1 'Ut Tensio sic Vis'
- V-2 Tenseur des Déformations
- V-3 Représentation des Déformations



V-1 'Ut Tensio sic Vis'

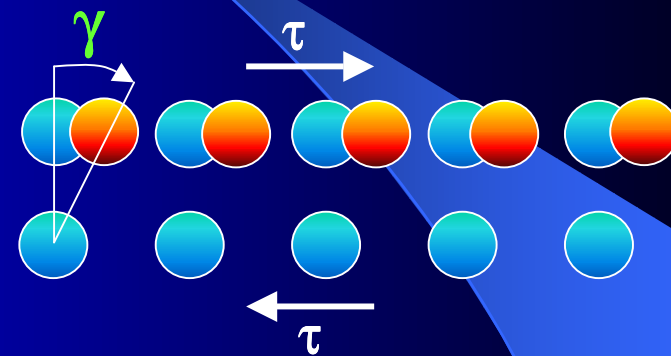
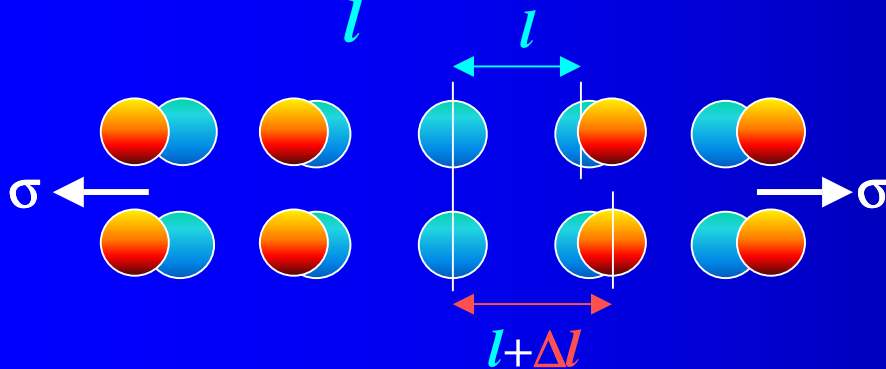
- V-1.1 Robert Hooke
- V-1.2 Translation, Rotation et Déformation
- V-1.3 Conservation de la Masse
- V-1.4 Champ de déplacement
- V-1.5 Exemple : le Glissement Simple
- V-1.6 Les Grandes Déformations
- V-1.7 Petites Déformations et Superposition
- V-1.8 Séparer Rotation et Déformation
- V-1.9 Continuité et Compatibilité des Déformations

V-1.1 'Ut Tensio sic Vis' : Robert Hooke

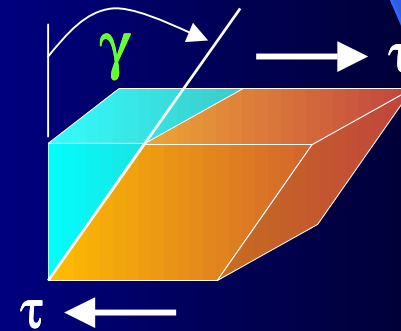
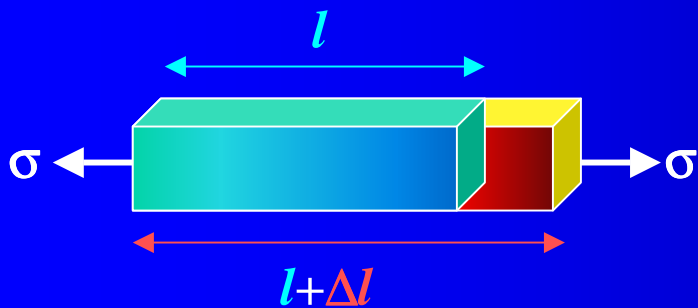
Pour supporter un chargement un milieu matériel doit se déformer

Extension $\frac{\Delta l}{l}$

Glissement γ

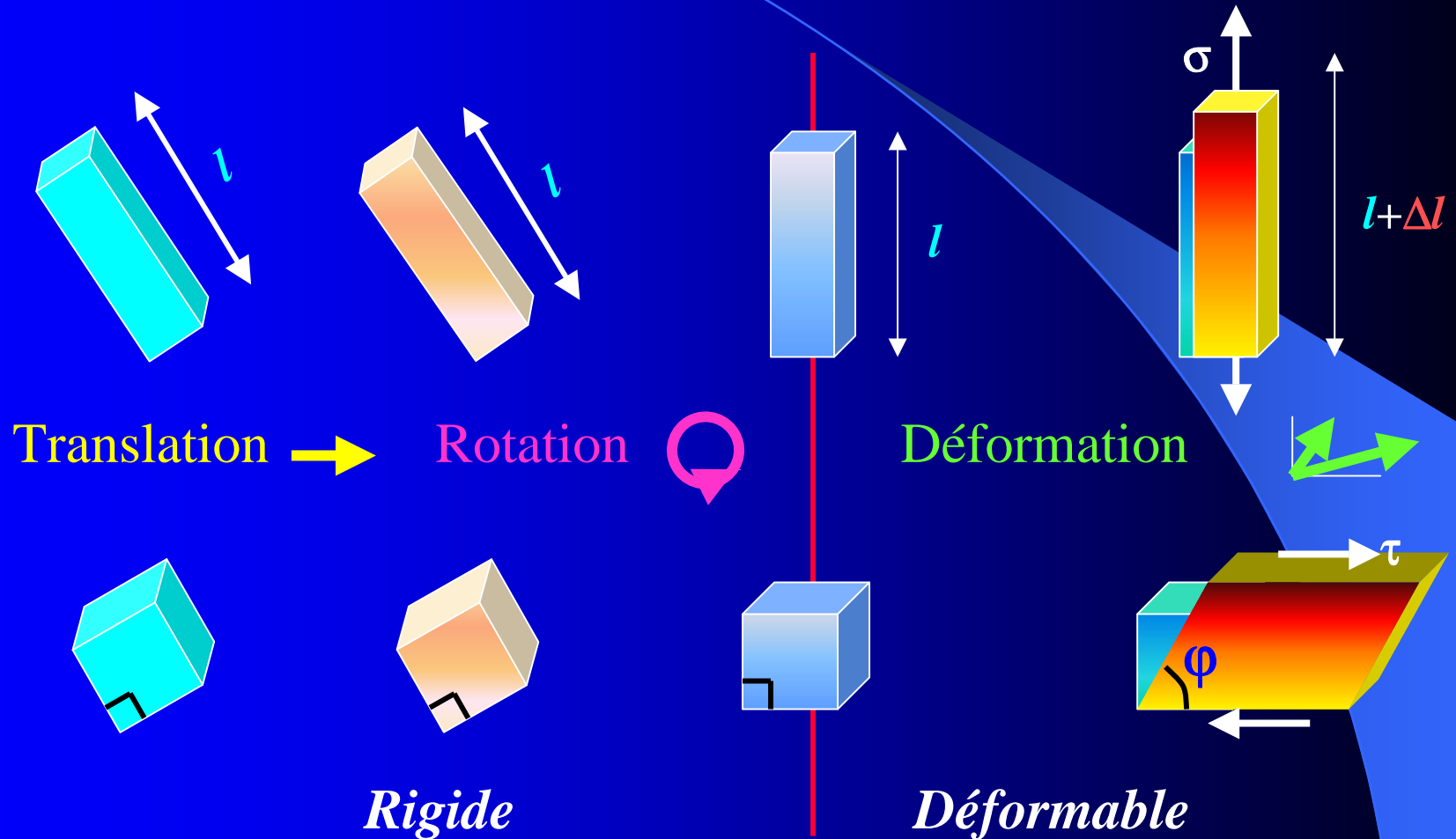


A l'échelle microscopique



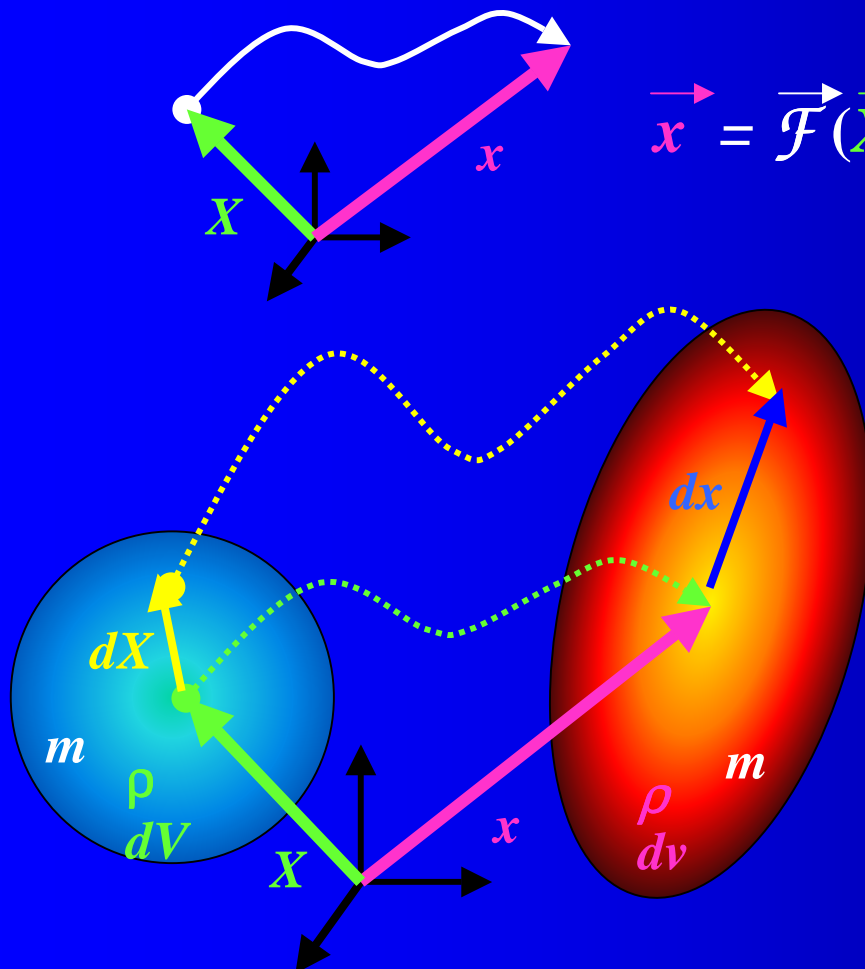
A l'échelle macroscopique

V-1.2 'Ut Tensio sic Vis' : Translation, Rotation et Déformation



Seule la Déformation modifie les Longueurs et les Angles

V-1.3 'Ut Tensio sic Vis' : Conservation de la Masse



$$\vec{x} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{X})$$

$$d\vec{x} = \overline{\overline{\text{Grad}}} \vec{\mathcal{F}}(\vec{X}) d\vec{X} = \overline{\overline{\gamma}} d\vec{X}$$

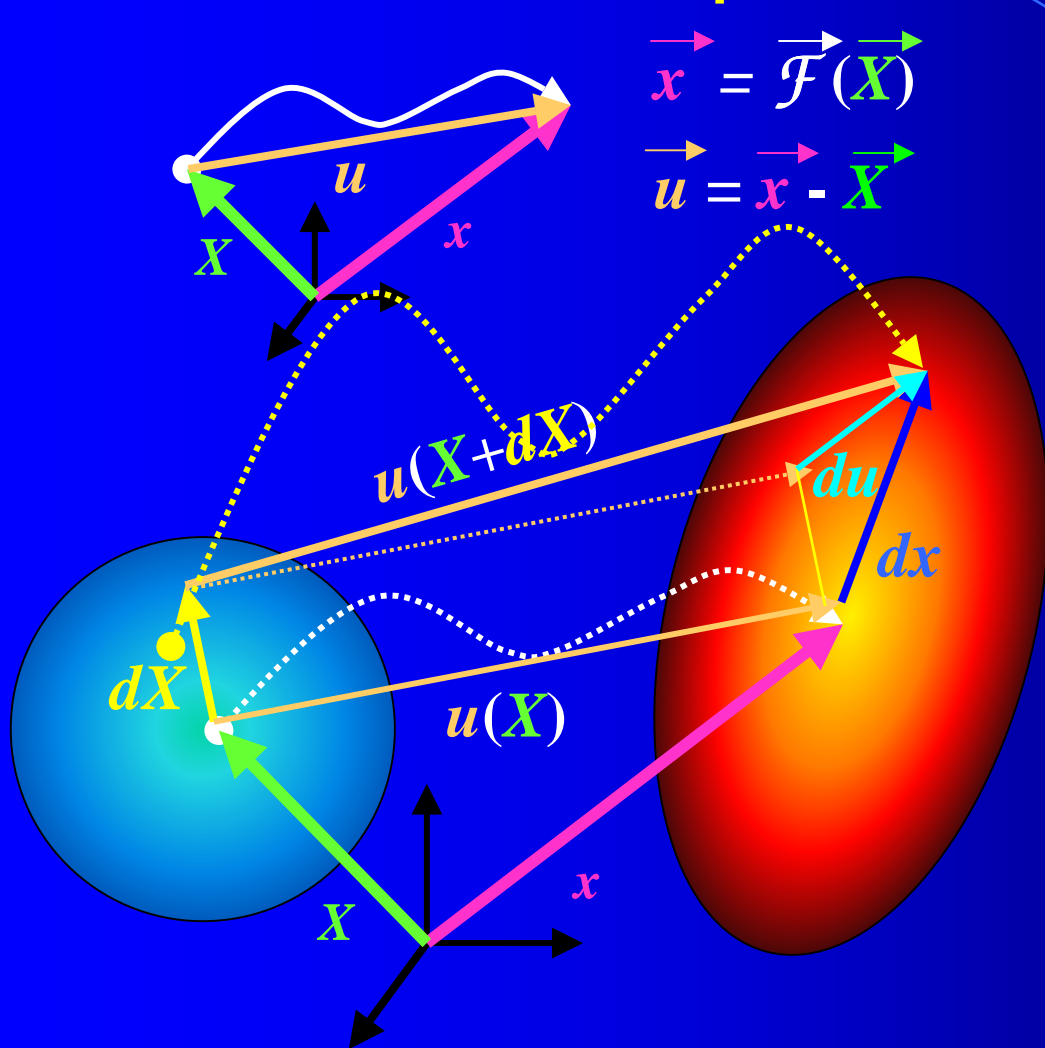
$$\overline{\overline{\gamma}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$

$$|\overline{\overline{\gamma}}| = \frac{dv}{dV}$$

$$m = \rho dV = \rho dv$$

$$|\overline{\overline{\gamma}}| \rho = \rho$$

V-1.4 'Ut Tensio sic Vis' : Champ de Déplacement



$$\vec{x} = \vec{F}(\vec{X})$$

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$$

$$d\vec{x} = \overline{\overline{\gamma}} d\vec{X}$$

$$d\vec{u} = (\overline{\overline{\gamma}} - \overline{\overline{\delta}}) d\vec{X} = \overline{\overline{G}}(\vec{X}) d\vec{X}$$

$$\overline{\overline{G}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Tenseur Gradient de Déplacement

$$\vec{u}(\vec{X} + d\vec{X}) = \vec{u}(\vec{X}) + \overline{\overline{G}}(\vec{X}) d\vec{X}$$

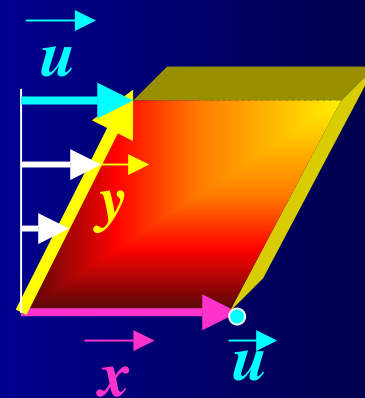
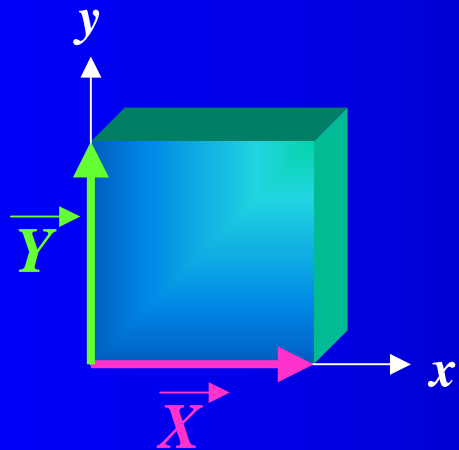
Translation + Rotation
Déformation

V-1.5 'Ut Tensio sic Vis' :

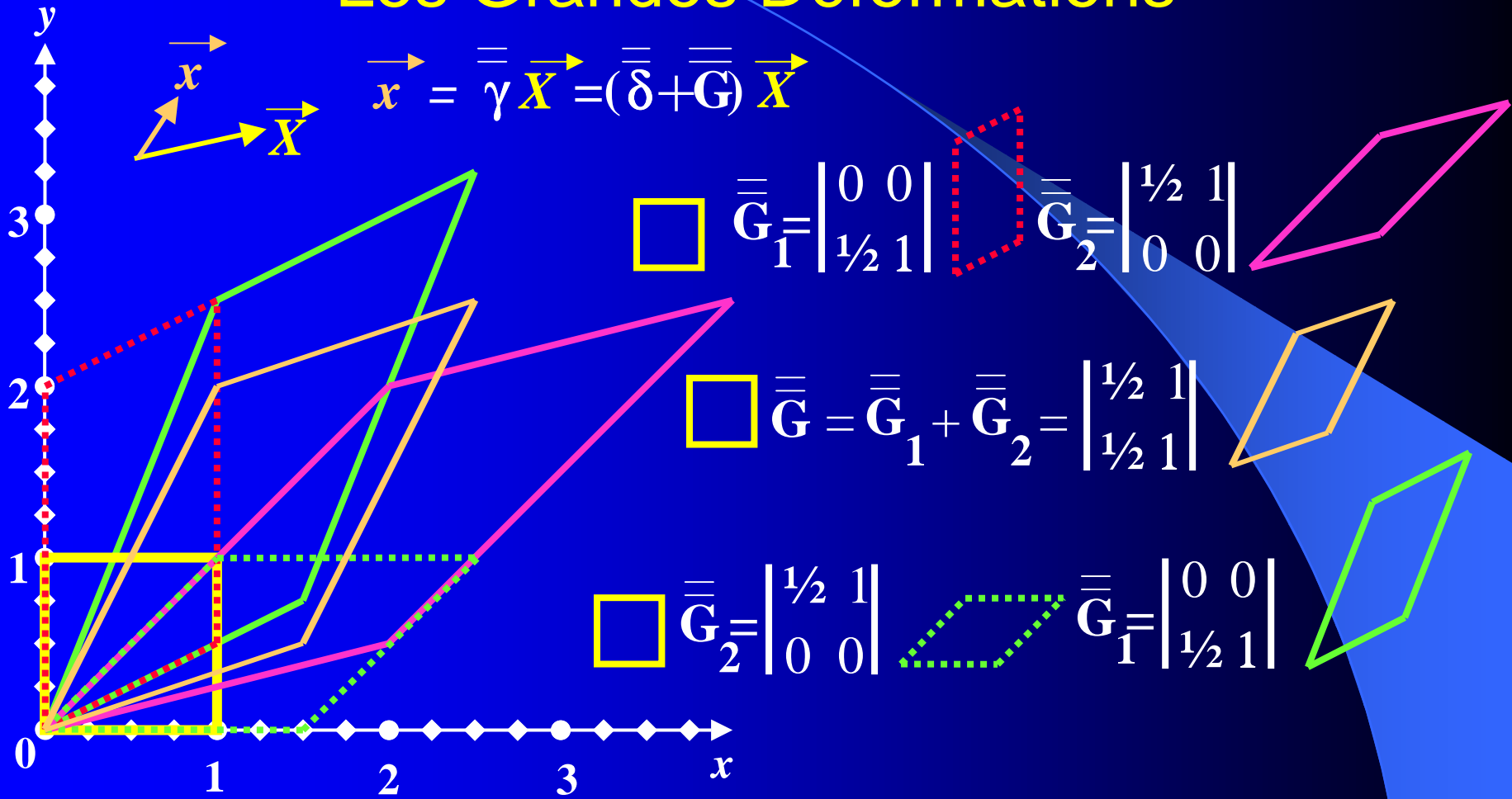
Exemple : Glissement Simple

$$\overline{\overline{\gamma}} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{\overline{\delta}} + \overline{\overline{\mathbf{G}}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \vec{x} = \overline{\overline{\gamma}} \vec{X} \\ \vec{u} = \overline{\overline{\mathbf{G}}} \vec{X} \end{array}$$

$$\vec{X} = \begin{vmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{x} = \begin{vmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{Y} = \begin{vmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{y} = \begin{vmatrix} \gamma Y \\ Y \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{u} = \begin{vmatrix} \gamma Y \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

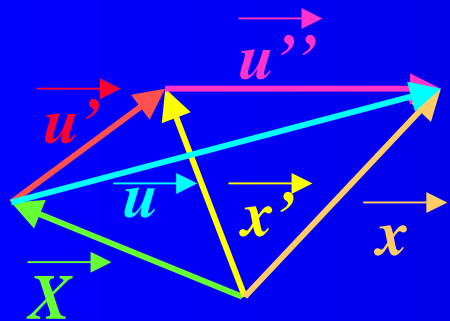


V-1.6 'Ut Tensio sic Vis' : Les Grandes Déformations



Les Grandes Déformations ne sont pas Additives

V-1.6 'Ut Tensio sic Vis' : Petites Déformations et Superposition



$$\vec{x}' = \bar{\gamma}' \vec{X} = (\bar{\delta} + \bar{G}') \vec{X} \quad \vec{u}' = \bar{G}' \vec{X}$$

$$\vec{x} = \bar{\gamma}'' \vec{x}' = (\bar{\delta} + \bar{G}'') \vec{x}' \quad \vec{u}'' = \bar{G}'' \vec{x}'$$

$$\vec{x} = \bar{\gamma} \vec{X} = (\bar{\delta} + \bar{G}) \vec{X} \quad \vec{u} = \bar{G} \vec{X}$$

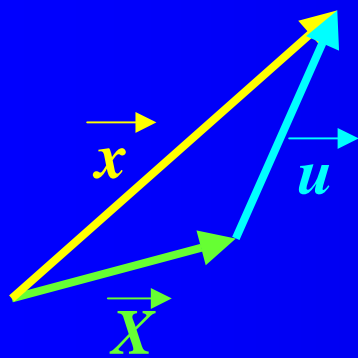
$$\vec{x} = \bar{\gamma}'' \vec{x}' = (\bar{\delta} + \bar{G}'') \vec{x}' = (\bar{\delta} + \bar{G}'') (\bar{\delta} + \bar{G}') \vec{X} = \vec{X} + (\bar{G}'' + \bar{G}' + \bar{G}'' \bar{G}') \vec{X}$$

$$\Rightarrow \bar{G} = \bar{G}'' + \bar{G}' + \bar{G}'' \bar{G}'$$

$$|\mathbf{G}_{ij}| < 1\% \Rightarrow \boxed{\bar{G} \approx \bar{G}'' + \bar{G}'}$$

Principe de Superposition : les Petites Déformations sont Additives

V-1.7 'Ut Tensio sic Vis' : Séparer Rotation et Déformation

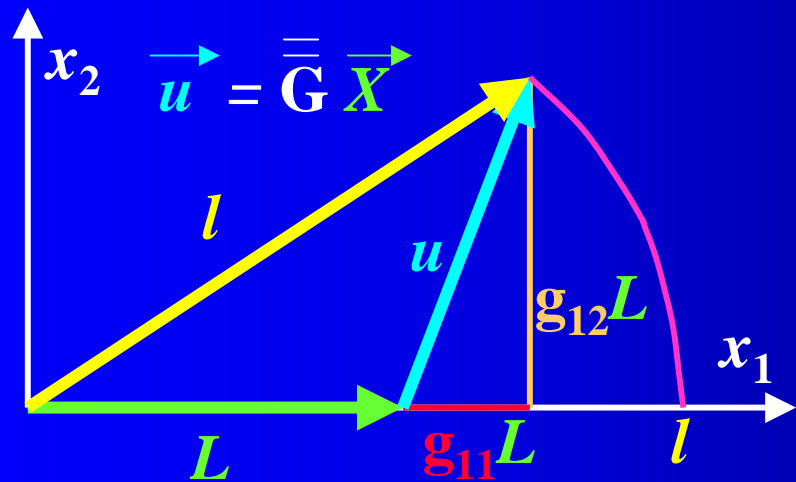


$$\vec{x} = \bar{\gamma} \vec{X} = (\bar{\delta} + \bar{\mathbf{G}}) \vec{X}$$

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{x} &= \vec{X} (\bar{\delta} + {}^t\bar{\mathbf{G}}) (\bar{\delta} + \bar{\mathbf{G}}) \vec{X} \\ &= \vec{X} \cdot \vec{X} + \vec{X} ({}^t\bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{G}}) \vec{X} + \cancel{\vec{X} {}^t\bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{G}} \vec{X}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\Omega}} & 2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \bar{\mathbf{G}} + {}^t\bar{\mathbf{G}} & \text{Déformation Symétrique} \\ {}^t\bar{\mathbf{G}} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\Omega}} & 2\bar{\boldsymbol{\Omega}} &= \bar{\mathbf{G}} - {}^t\bar{\mathbf{G}} & \text{Rotation Antisymétrique} \end{aligned}$$

$$\vec{u} = \bar{\mathbf{G}} \vec{X} = (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}) \vec{X}$$



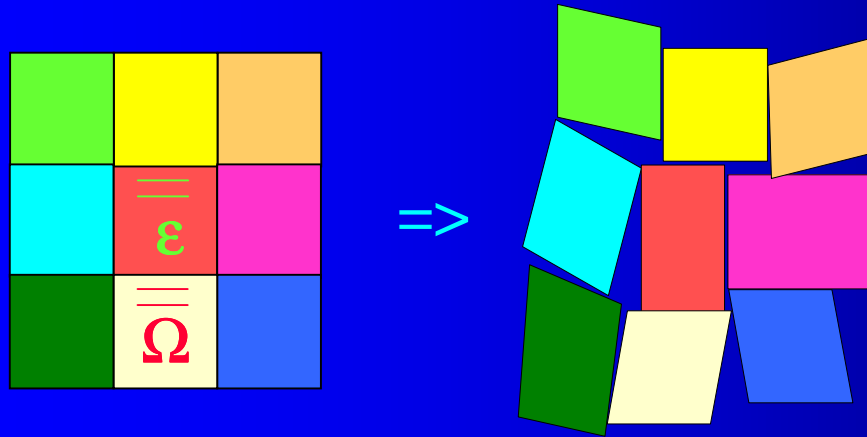
$$l^2 = L^2(1 + g_{11})^2 + (g_{12}L)^2$$

$$l = L \sqrt{\{(1 + g_{11})^2 + g_{12}^2\}}$$

$$l \approx L(1 + g_{11})$$

V-1.8 'Ut Tensio sic Vis' :

Continuité et Compatibilité des Déformations



Continuité $\Rightarrow \vec{du}$ intégrable

$$\vec{du} = \overline{\overline{\mathbf{G}}} d\vec{X} = (\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}}) d\vec{X}$$

soit $\text{Rot}_D \overline{\overline{\mathbf{G}}} = 0$

$$\text{Rot}_D \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = -\text{Rot}_D \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} = {}^t \text{Grad } \vec{\omega}$$

Vecteur tourbillon $\vec{\omega} \wedge d\vec{X} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} d\vec{X}$

$$\Rightarrow \text{Rot}_G \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \text{Grad } \vec{\omega}$$

$d\vec{\omega} = \text{Grad } \vec{\omega} d\vec{X}$ intégrable si $\text{Rot}_D(\text{Grad } \vec{\omega}) = 0$

$$\text{Inc}(\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = \text{Rot}_D(\text{Rot}_G \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = \text{Rot}_G(\text{Rot}_D \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = 0$$

$$[\text{Inc}(\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}})]_{rl} = \delta_{rmi} \delta_{lkj} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_m \partial x_k} = 0$$

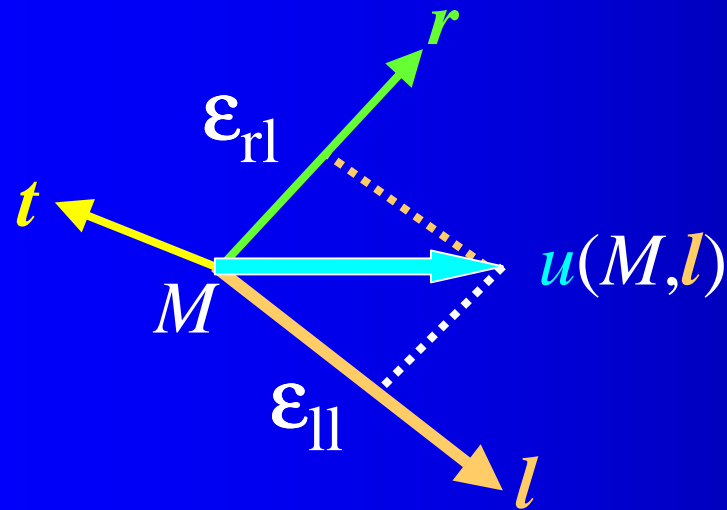
Avec $\text{Div}_D \text{Inc}(\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = 0$

V-2 Tenseur des Déformations

- V-2.1 Repère local : Extension, Distorsion
- V-2.2 Tenseur des Déformations : Définition
- V-2.3 Déformations Principales et Axes Propres
- V-2.4 Invariants du Tenseur des Déformations
- V-2.5 Sphérique et Déviateur des Déformations
- V-2.6 Changement de Volume et de Forme

V-2.1 Tenseur des Déformations :

Repère local



Au point M segment unitaire direction l

$$\vec{u}(M, \vec{l}) = \underline{\underline{\epsilon}}(M) \vec{l}$$

l, r, u coplanaires

Trièdre local direct l, r, t

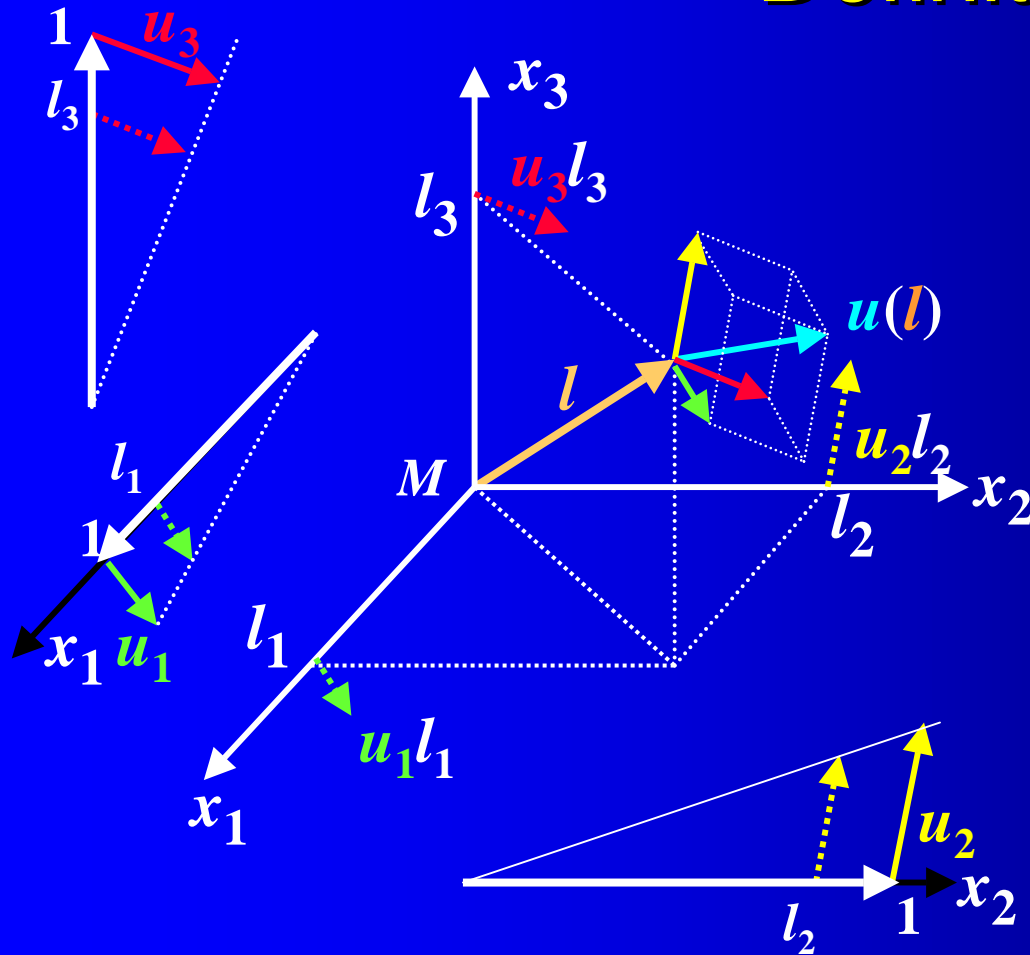
$$\epsilon_{ll} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{l} \quad \text{Extension} > 0 \quad \text{Contraction} < 0$$

$$\epsilon_{rl} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} \quad \text{Distorsion}$$

$$\epsilon_{tl} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$$

V-2.2 Tenseur des Déformations :

Définition $\vec{u}(M, \vec{l}) = \overline{\overline{\varepsilon}}(M) \vec{l}$



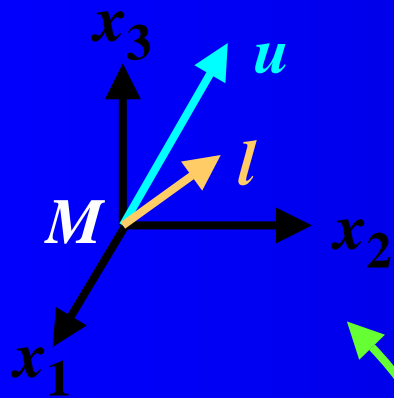
$$\vec{u}(\vec{l}) = \vec{u}_1 l_1 + \vec{u}_2 l_2 + \vec{u}_3 l_3$$

$$\vec{u}(\vec{l}) = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{l} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

Le Tenseur des Déformations ε est **Symétrique**

V-2.3 Tenseur des Déformations : Déformations Principales et Axes Propres

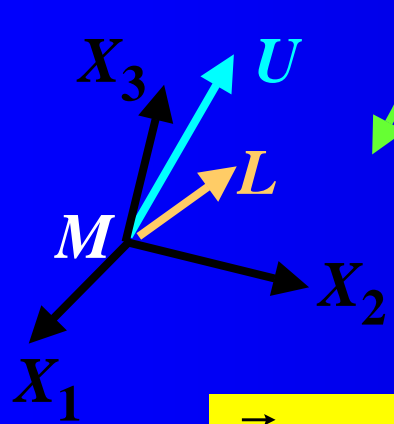


$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(M)$$

$$\vec{l} = {}^t A \vec{L}$$

ε_{11}	ε_{12}	ε_{13}
ε_{21}	ε_{22}	ε_{23}
ε_{31}	ε_{32}	ε_{33}

$$\vec{u} = \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \vec{l}$$



$$\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}(M)$$

$$\vec{U} = A \vec{u}$$

E_I	0	0
0	E_{II}	0
0	0	E_{III}

$$\vec{U} = \overline{\overline{\boldsymbol{E}}} \vec{L}$$

$$\vec{U} = A \vec{u}$$

$$= A \overline{\overline{\boldsymbol{\vare}}} \vec{l}$$

$$= A \overline{\overline{\boldsymbol{\vare}}} {}^t A \vec{L}$$

$$= \overline{\overline{\boldsymbol{E}}} \vec{L}$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}(M) = A \overline{\overline{\boldsymbol{\vare}}}(M) {}^t A$$

$$E_{ii} = \mathbf{a}_{ij} \varepsilon_{jk} \mathbf{a}_{kl}$$

V-2.4 Tenseur des Déformations : Les Invariants Tensoriels

$$\overline{\overline{\mathbf{E}}}(M) \begin{vmatrix} E_I & 0 & 0 \\ 0 & E_{II} & 0 \\ 0 & 0 & E_{III} \end{vmatrix} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(M) \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_1 = E_I + E_{II} + E_{III} = \varepsilon_{kk} = 3 \varepsilon_m = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$I_2 = E_I E_{II} + E_{II} E_{III} + E_{III} E_I = (\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2) + (\varepsilon_{11} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}^2) + (\varepsilon_{22} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}^2)$$

$$I_3 = E_I E_{II} E_{III} = \text{Det}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

Caley-Hamilton

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^3 - I_1 \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^2 + I_2 \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} - I_3 \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}} = \overline{\overline{\mathbf{0}}}$$

6 Composantes = 3 (Invariants ou Valeurs Propres) + 3 Angles d'Euler

V-2.5 Tenseur des Déformations : Sphérique et Déviateur

$$\bar{\bar{\epsilon}}(M) = \bar{\bar{S}} + \bar{\bar{D}} = \begin{vmatrix} \epsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{11} - \epsilon_m & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - \epsilon_m & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} - \epsilon_m \end{vmatrix}$$

$\epsilon_m = \frac{1}{3} \text{Tr}(\bar{\bar{\epsilon}})$

$\epsilon_d^2 = \frac{1}{3} \text{Tr}(\bar{\bar{D}}^2)$

Sphérique S $\text{Tr}(S) = \text{Tr}(\epsilon)$

Déviateur D $\text{Tr}(D) = 0$

ϵ_m Déformation Normale Moyenne (Extension ou Contraction)

ϵ_d Déformation Déviatorique Moyenne (Distorsion)

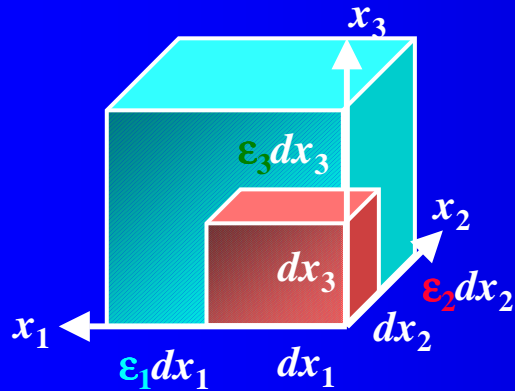
π Tenseur des Directions $\text{Tr}(\pi) = 0$ et $\text{Tr}(\pi^2) = 3$

$$\bar{\bar{\epsilon}}(M) = \bar{\bar{S}} + \bar{\bar{D}} = \epsilon_m \bar{\bar{\delta}} + \epsilon_d \bar{\bar{\pi}} = \epsilon_m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \epsilon_d \begin{vmatrix} \pi_1(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \pi_2(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \pi_3(\mu) \end{vmatrix}$$

6 Composantes = $\epsilon_m + \epsilon_d + \mu + 3$ Angles d'Euler

V-2.6 Tenseur des Déformations :

Changement de Volume et de Forme

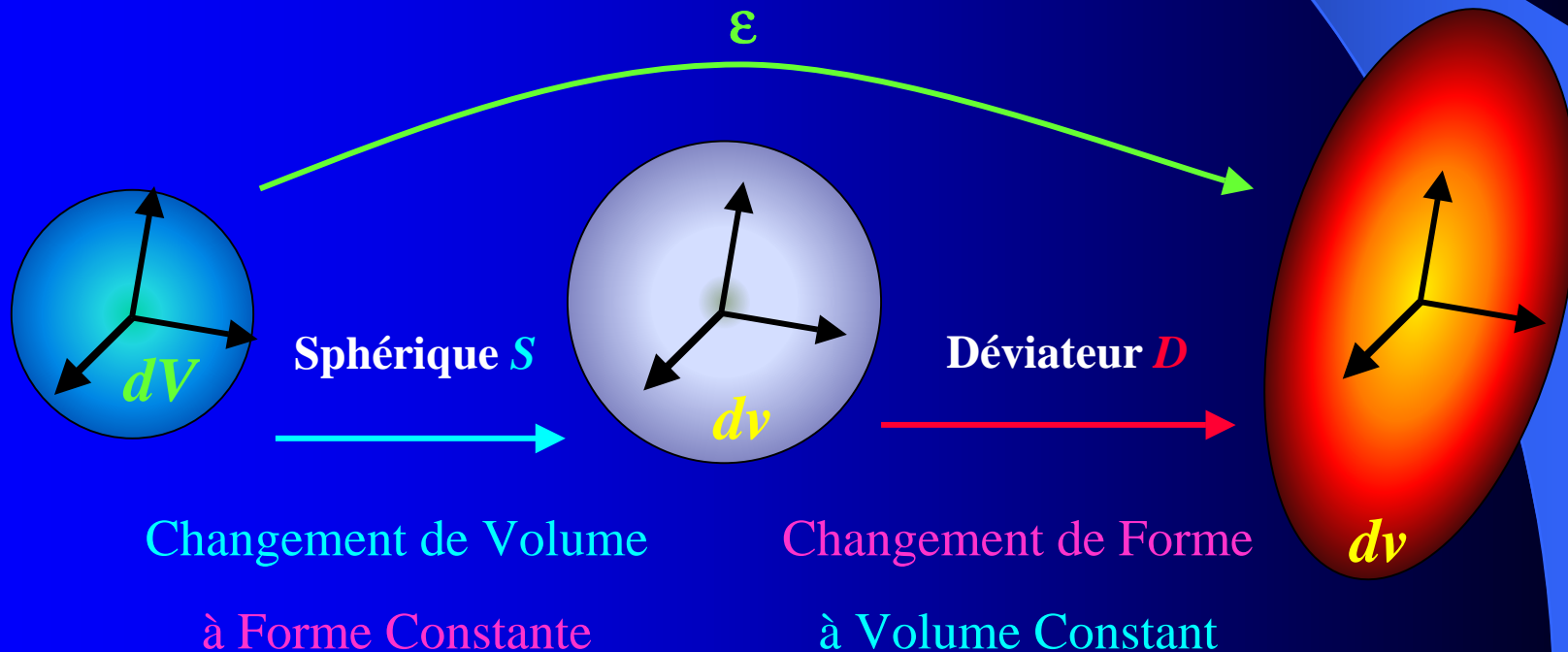


$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

$$dv = (1 + \varepsilon_1) dx_1 (1 + \varepsilon_2) dx_2 (1 + \varepsilon_3) dx_3$$

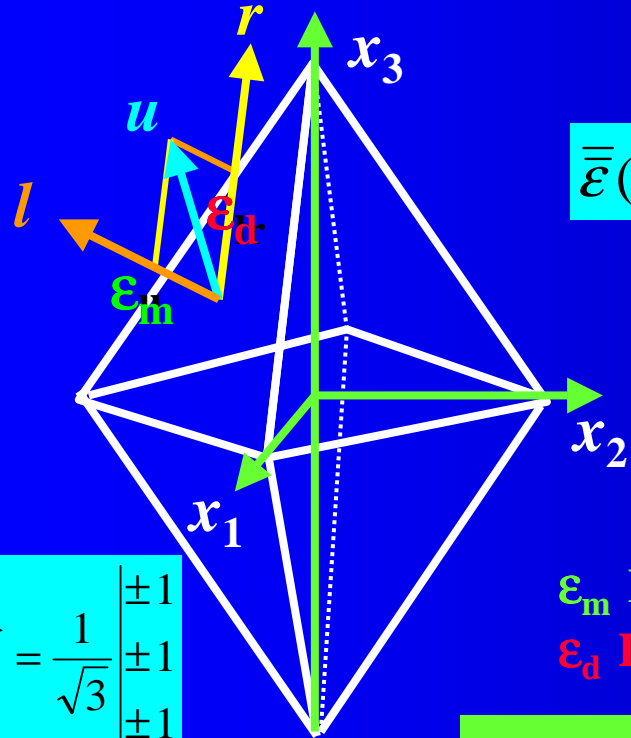
Variation Relative de Volume $\frac{dv - dV}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{Div } \vec{u}$



V-3 Représentation des Déformations

- V-3.1 Déformations Octaédriques
- V-3.2 Ellipsoïde des Déformations
- V-3.3 Cercle de Mohr Principal
- V-3.4 Cercle de Mohr et Déformation
- V-3.5 Cercles de Mohr
- V-3.6 Glissement Pur et Glissement Simple

V-3.1 Représentation des Déformations : Déformations Octaédriques



$$\bar{\bar{\epsilon}}(M) = \bar{\bar{S}} + \bar{\bar{D}} = \epsilon_m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_3 \end{vmatrix}$$

Sphérique \mathbf{S} $\text{Tr}(\mathbf{S}) = \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})$ Déviateur \mathbf{D} $\text{Tr}(\mathbf{D}) = 0$

$$\epsilon_m = \frac{1}{3} \text{Tr}(\bar{\bar{S}})$$

$$\epsilon_d^2 = \frac{1}{3} \text{Tr}(\bar{\bar{D}}^2)$$

ϵ_m Déformation Normale Moyenne (Extension - Contraction)
 ϵ_d Déformation Déviatorique Moyenne (Distorsion)

$$\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_{ll} = \vec{l} \cdot \vec{u} = \vec{l} \bar{\bar{S}} \vec{l} + \vec{l} \bar{\bar{D}} \vec{l} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\bar{\bar{S}}) + \frac{1}{3} \text{Tr}(\bar{\bar{D}}) = \epsilon_m$$

$$\epsilon_{ll} = \epsilon_m$$

$$\epsilon_{lr}^2 = \vec{T} \cdot \vec{T} - \epsilon_{ll}^2 = \vec{l} (\bar{\bar{S}} + \bar{\bar{D}})^2 \vec{l} - \epsilon_m^2 = \vec{l} (\bar{\bar{S}}^2) \vec{l} + 2\vec{l} (\bar{\bar{S}} \bar{\bar{D}}) \vec{l} + \vec{l} (\bar{\bar{D}}^2) \vec{l} - \epsilon_m^2$$

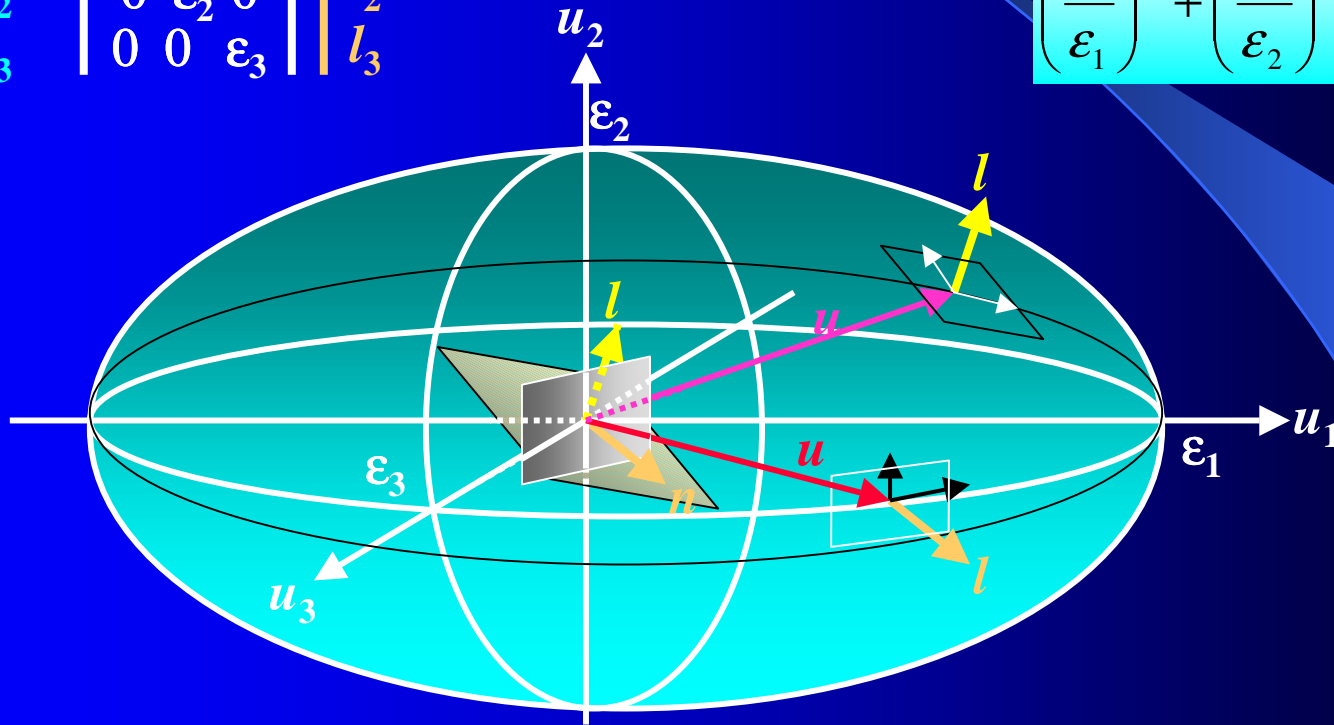
$$= \frac{1}{3} \text{Tr}(\bar{\bar{S}}^2) + 2\epsilon_m \text{Tr}(\bar{\bar{D}}) + \frac{1}{3} \text{Tr}(\bar{\bar{D}}^2) - \epsilon_m^2 = \epsilon_d^2$$

$$\epsilon_{lr} = \epsilon_d$$

V-3.2 Représentation des Déformations : Ellipsoïde des Déformations

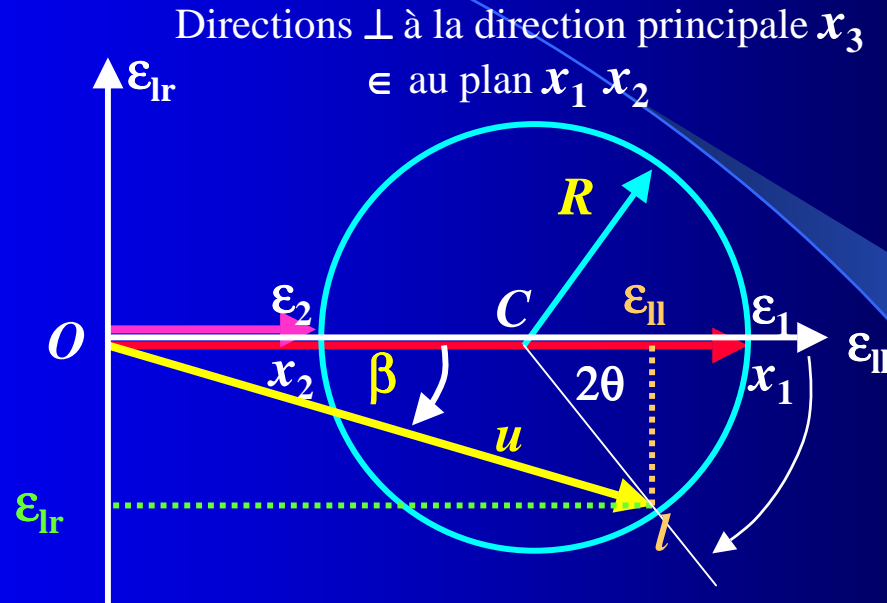
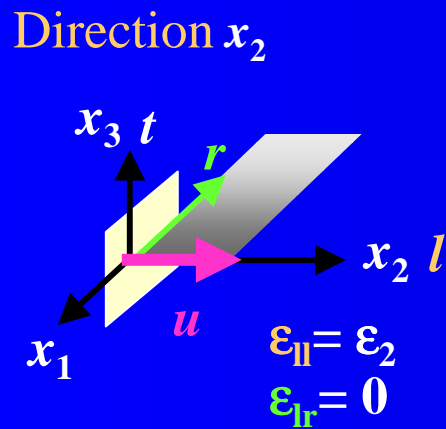
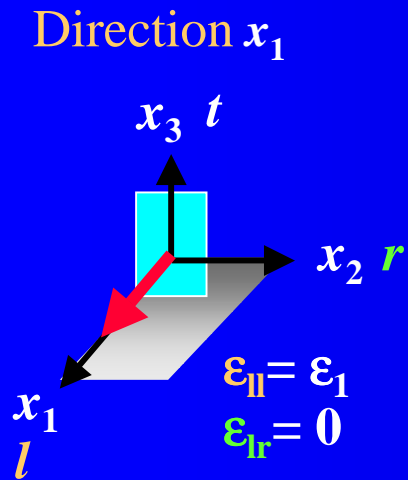
$$\begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{array} \right| \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \end{array}$$

$$\left(\frac{u_1}{\varepsilon_1} \right)^2 + \left(\frac{u_2}{\varepsilon_2} \right)^2 + \left(\frac{u_3}{\varepsilon_3} \right)^2 = 1$$



Lorsque l appartient à un plan principal, u appartient au même plan

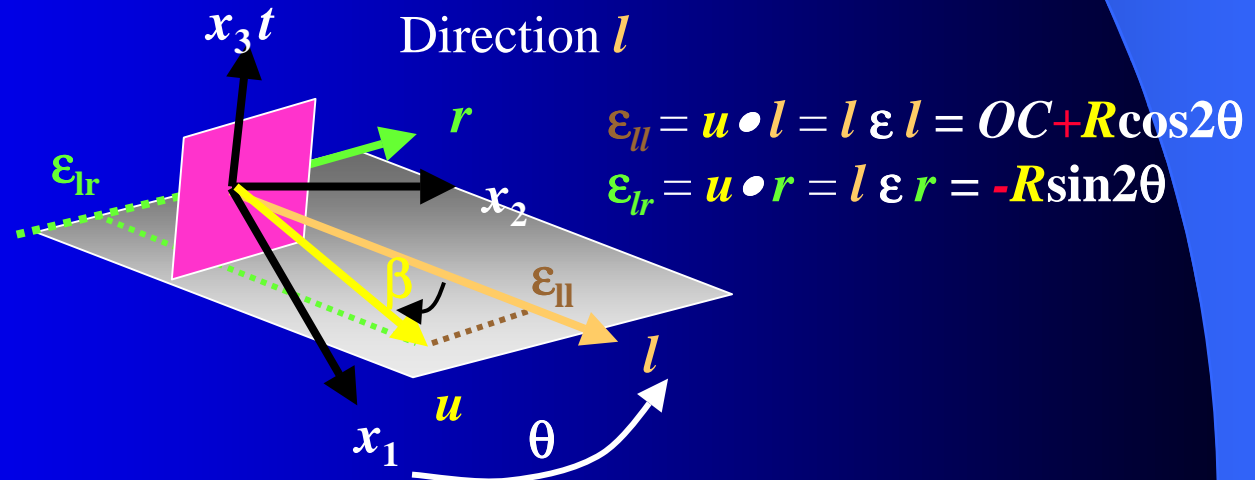
V-3.3 Représentation des Déformations : Cercle de Mohr Principal



$$\bar{\bar{\epsilon}}(M) = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix}$$

$$R = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}$$

$$OC = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$$

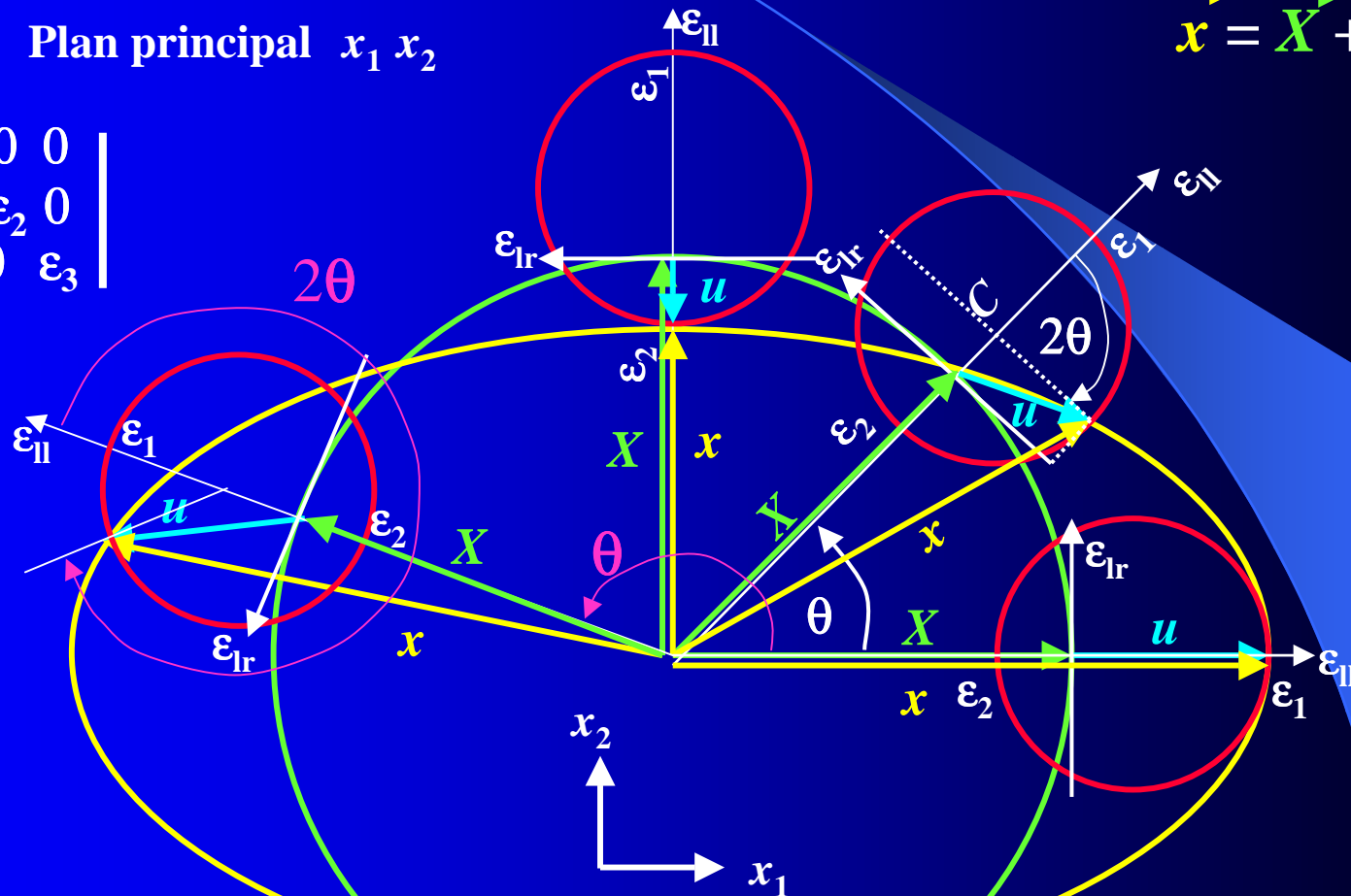


V-3.4 Représentation des Déformations : Cercle de Mohr et Déformation

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

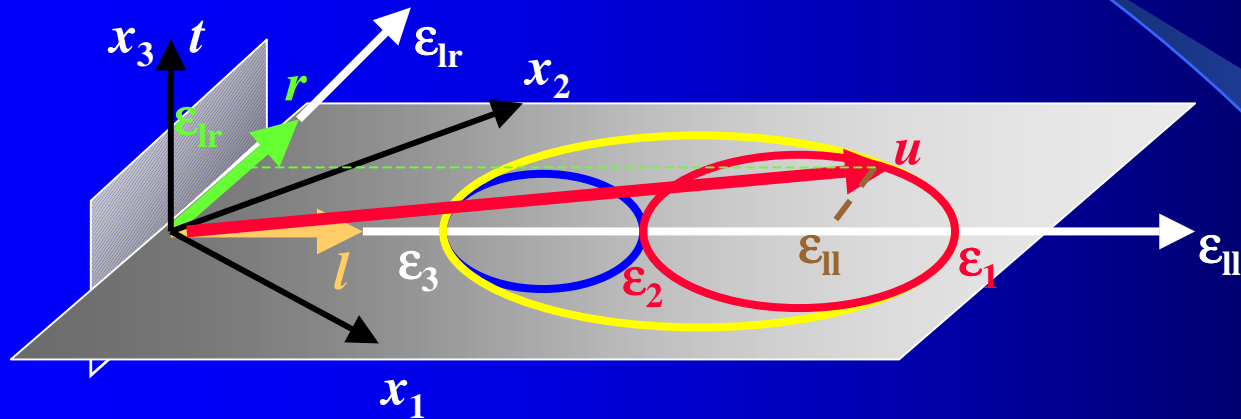
Plan principal $x_1 x_2$

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$$

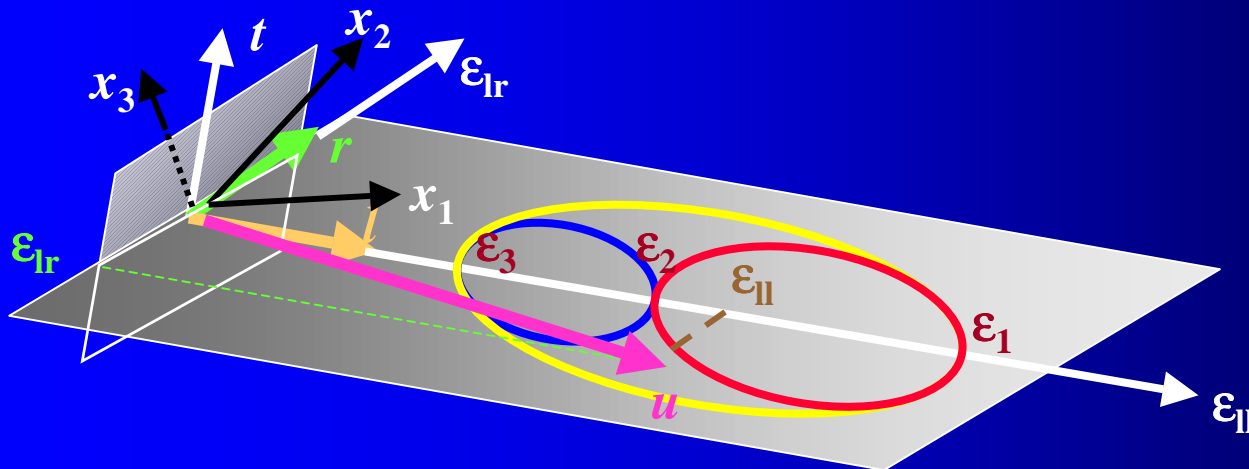


V-3.5 Représentation des Déformations : Cercles de Mohr

Direction l appartenant à un plan principal (x_1, x_2)



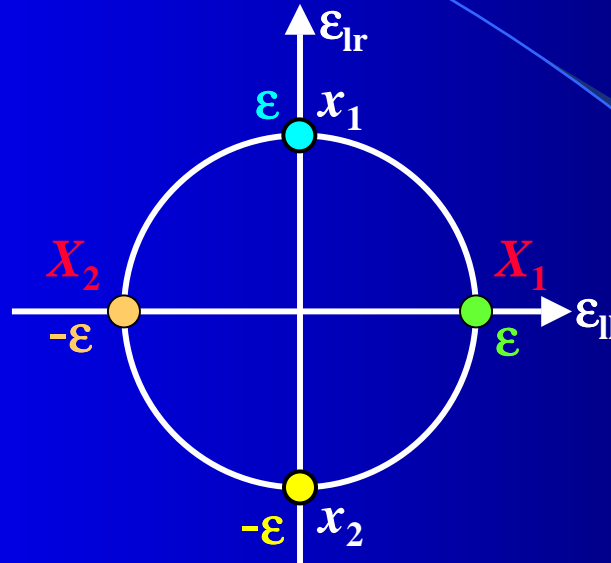
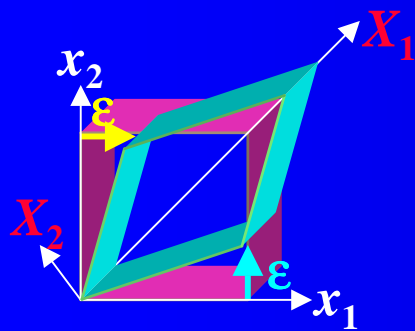
Direction l n'appartenant pas à un plan principal



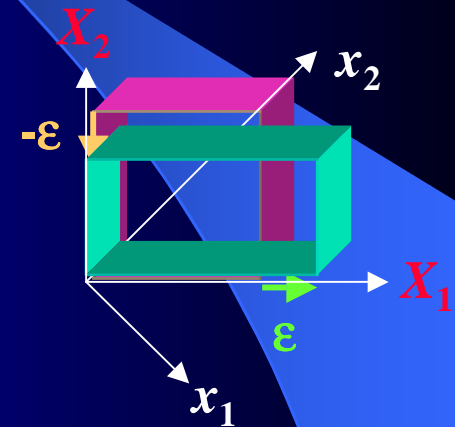
$$\bar{\bar{\mathcal{E}}}(M) = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix}$$

V-3.6 Représentation des Déformations : Glissement Pur et Glissement Simple

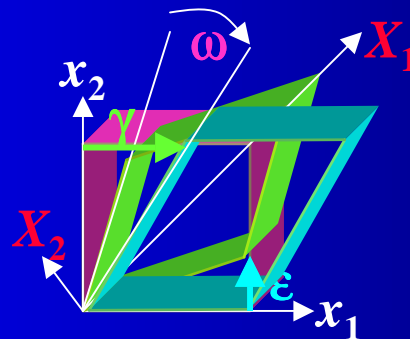
$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\overline{\overline{\boldsymbol{G}}} = \begin{vmatrix} 0 & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La **distorsion** est **maximale** sur les directions orientées à **45°** des **directions principales**

La **rotation** $\omega = -\varepsilon$

Le **glissement** est le **double** de la **distorsion** $\gamma = 2\varepsilon$

VI Relation Contraintes - Déformation

- VI-1 Contraintes et Déformations
- VI-2 Lois de Comportement
- VI-3 σ et ε Nominales et Naturelles
- VI-4 Le Travail de Déformation

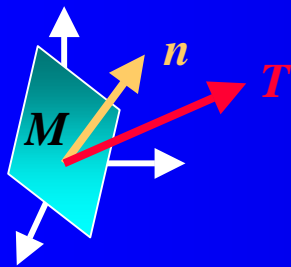


VI-1 Contraintes et Déformations

Description de l'État Mécanique Local

Contraintes

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}(M) \vec{n}$$

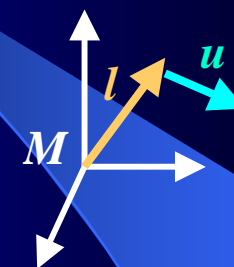


$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Définition

Déformations

$$\vec{u}(M, \vec{l}) = \overline{\overline{\epsilon}}(M) \vec{l}$$



$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$$

Symétrie

Loi Fondamentale de la Dynamique

$$\text{Div}_D \overline{\overline{\sigma}} + \rho \overline{\overline{X}} = \rho \overline{\overline{\gamma}}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = \rho \gamma_i$$

Conditions aux limites

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) \vec{n} = \vec{f}(M)$$

$$2\overline{\overline{\epsilon}} = \overline{\overline{\text{Grad}}} \vec{u} + {}^t\overline{\overline{\text{Grad}}} \vec{u} \quad \frac{dV}{V} = \text{Tr}(\overline{\overline{\epsilon}}) = \text{Div} \vec{u}$$

Conservation de la Masse : Continuité

$$\text{Inc}(\overline{\overline{\epsilon}}) = \text{Rot}_D(\text{Rot}_G \overline{\overline{\epsilon}}) = 0$$

$$[\text{Inc}(\overline{\overline{\epsilon}})]_{rl} = \delta_{rmi} \delta_{lkj} \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_m \partial x_k} = 0$$

Description Indépendante du Comportement du Matériau

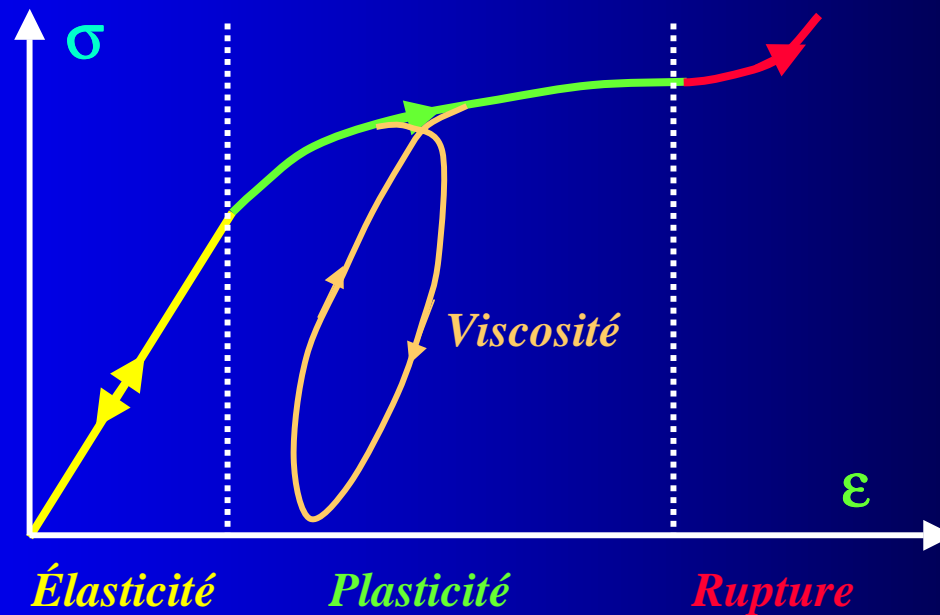
VI-2 Lois de Comportement

Équation d'État du Matériau

$$\mathcal{F}\left\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \frac{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{dt}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \frac{d\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{dt}\right\} = 0$$

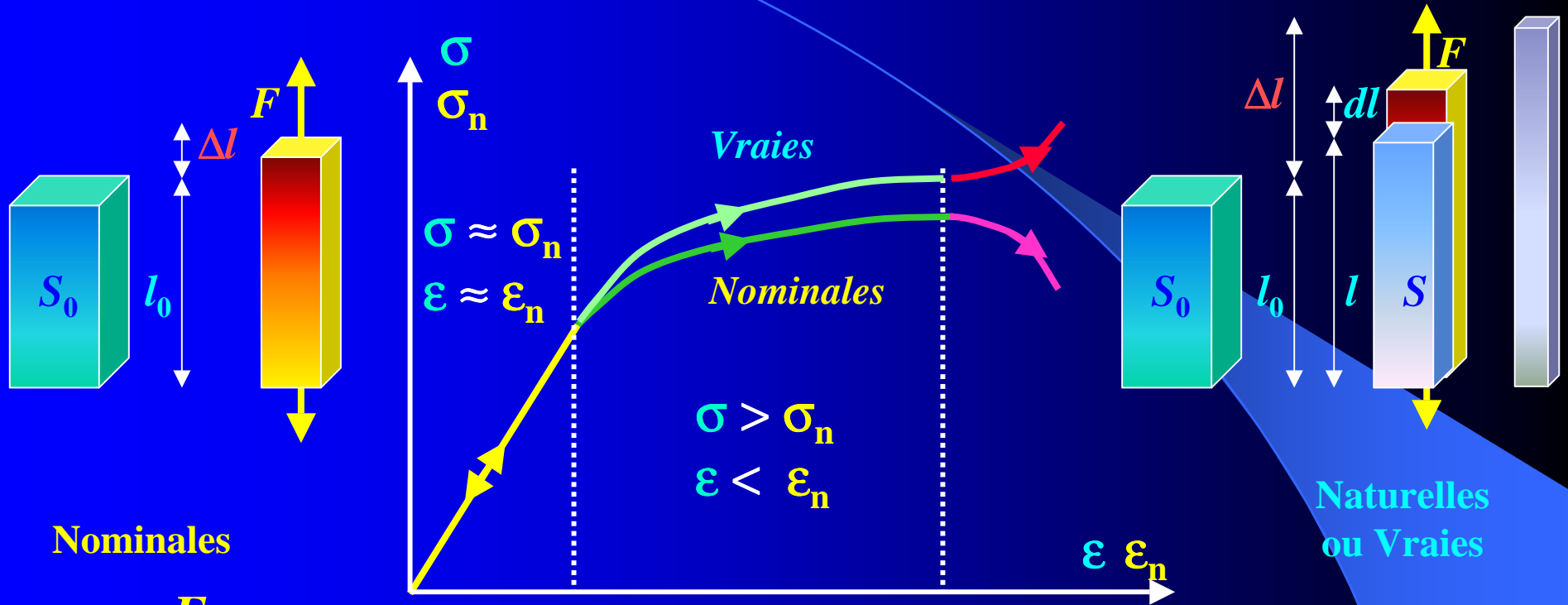
Déformations Contraintes

Solution du Problème



Description du Comportement du Matériau

VI-3 σ et ϵ Nominales et Naturelles



Nominales

$$\sigma_n = \frac{F}{S_0}$$

$$\epsilon_n = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Élasticité

Plasticité

Rupture

$$\epsilon = \int_{l_0}^{l_0 + \Delta l} \frac{dl}{l} = \text{Ln}\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right) = \text{Ln}(1 + \epsilon_n)$$

Naturelles ou Vraies

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

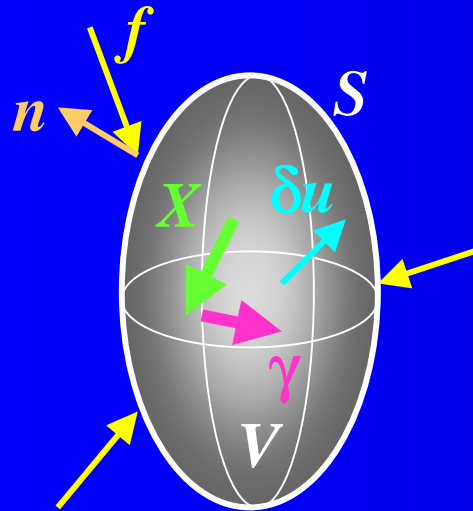
$$d\epsilon = \frac{dl}{l}$$

La Loi de Comportement du Matériau relie ϵ et σ Vraies

VI-4 Le Travail de Déformation

- VI-4.1 Travail des Forces Externes
- VI-4.2 Champs admissibles et Travaux virtuels
- VI-4.3 Relation avec la Thermodynamique
- VI-4.4 Réversibilités Thermique et Mécanique

VI-4.1 Le Travail de Déformation : Travail des Forces Externes



Forces de Surface :

- n Normale Extérieure
- f Force Extérieure Appliquée (/ unité de surface)

$$\bar{\bar{\sigma}}(M)\vec{n} = \vec{f}(M)$$

+ \Rightarrow **Champ de déplacement** δu

Forces de Volume :

- $-\rho\vec{\gamma}$ Force d'Inertie
- X Force Extérieure Appliquée (/ unité de masse)

$$\iiint_V \delta W dV = \iiint_V -\rho\vec{\gamma} \cdot \delta\vec{u} dV + \iiint_V \rho X \cdot \delta\vec{u} dV + \iint_S \vec{f} \cdot \delta\vec{u} dS$$

$$\iint_S \vec{f} \cdot \delta\vec{u} dS = \iiint_V \text{Div}(\bar{\bar{\sigma}}\delta\vec{u}) dV = \iiint_V \text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}(\delta\bar{\bar{\epsilon}} + \delta\bar{\bar{\Omega}})) dV + \iiint_V \text{Div}_D \bar{\bar{\sigma}} \cdot \delta\vec{u} dV$$

$$\iiint_V \delta W dV = \iiint_V (\text{Div}_D \bar{\bar{\sigma}} + \rho X - \rho\vec{\gamma}) \delta\vec{u} dV + \iiint_V \text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}\delta\bar{\bar{\Omega}}) dV + \iiint_V \text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}\delta\bar{\bar{\epsilon}}) dV$$

Équilibre Dynamique
Anti Symétrie

$$\delta W = \text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}\delta\bar{\bar{\epsilon}})$$

VI-4.2 Le Travail de Déformation : Champs admissibles et Travaux virtuels

$\bar{\bar{\epsilon}}'$ Cinématiquement admissible
 \bar{u}' Continu dérivable

$$\text{Inc}(\bar{\bar{\epsilon}}') = 0$$

Loi de Comportement

$$\bar{\bar{\sigma}}' = \mathcal{F}\{\bar{\bar{\epsilon}}'\} \Rightarrow \bar{\bar{\sigma}}' \vec{n} \neq \vec{f}'$$

et $\text{Div}_D \bar{\bar{\sigma}}' + \rho \vec{X}' \neq \rho \vec{\gamma}'$

\bar{u}' $\bar{\bar{\epsilon}}'$ $\bar{\bar{\sigma}}'$ Virtuels

$\bar{\bar{\sigma}}^*$ Dynamiquement admissible

$$\text{Div}_D \bar{\bar{\sigma}}^* + \rho \vec{X}^* = \rho \vec{\gamma}^*$$

$$\bar{\bar{\sigma}}^* \vec{n} = \vec{f}^*$$

Loi de Comportement

$$\bar{\bar{\epsilon}}^* = \mathcal{F}\{\bar{\bar{\sigma}}^*\} \Rightarrow \text{Inc}(\bar{\bar{\epsilon}}^*) \neq 0$$

$\bar{\bar{\sigma}}^*$ \vec{X}^* $\vec{\gamma}^*$ \vec{f}^* $\bar{\bar{\epsilon}}^*$ Virtuels

$$\delta W = \text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}^* \delta \bar{\bar{\epsilon}}')$$

Solution réelle

$$\vec{X}' \vec{\gamma}' \vec{f}'$$

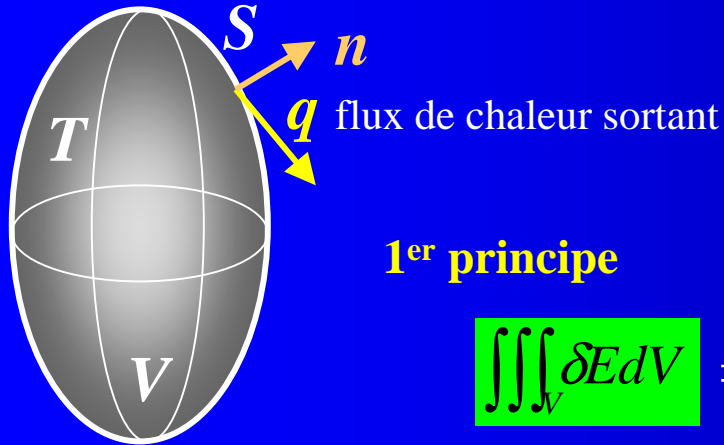
$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}^* &= \bar{\bar{\sigma}} \\ \bar{\bar{\epsilon}}' &= \bar{\bar{\epsilon}} \end{aligned}$$

$$\vec{u}$$

$$\delta W = \text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}} \delta \bar{\bar{\epsilon}})$$

- | | | |
|---|-------------|---------------------|
| { | Récupérable | (Élasticité) |
| | Dissipé | (Viscosité Rupture) |
| | Bloqué | (Plasticité) |

VI-4.3 Le Travail de Déformation : Relation avec la Thermodynamique



1^{er} principe

$$\iiint_V \delta E dV = \iiint_V \delta W dV + \iiint_V \delta Q dV - \delta \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS$$

E densité volumique d'énergie interne
 F densité volumique d'énergie libre
 S densité volumique d'entropie
 W densité volumique de travail reçu
 Q densité volumique de chaleur reçue

$$F = E - TS$$

$$\delta W = \text{Tr}(\bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon}) \quad \text{et} \quad \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{Div} \vec{q} dV \quad \Rightarrow \quad \delta E = \text{Tr}(\bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon}) + \delta Q - \delta \text{Div} q$$

2^{ème} principe

$$\iiint_V \delta S dV - \iiint_V \frac{\delta Q}{T} dV + \delta \iint_S \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} dS \geq 0$$

$$\iint_S \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{Div} \frac{\vec{q}}{T} dV \quad \text{et} \quad \text{Div} \frac{\vec{q}}{T} = \frac{1}{T} \text{Div} \vec{q} - \frac{\vec{q} \text{Grad} T}{T^2} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} T \delta S - (\delta Q - \delta \text{Div} \vec{q}) &= T \delta S - \delta E + \text{Tr}(\bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon}) \\ &= \text{Tr}(\bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon}) - (\delta F + S \delta T) \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\delta \psi_1 = \text{Tr}(\bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon}) - (\delta F + S \delta T) \quad \text{intrinsèque}$$

$$\delta \psi_2 = -\delta \left(\frac{\vec{q}}{T} \text{Grad} T \right)$$

Incréments de dissipation volumique
thermique

$$\delta \psi = \delta \psi_1 + \delta \psi_2 \geq 0$$

VI-4.4 Le Travail de Déformation : Réversibilités Thermique et Mécanique

Dissipation volumique

$$\delta\psi = \delta\psi_1 + \delta\psi_2$$

Thermique

$$\delta\psi_2 = -\delta\left(\frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{\text{Grad}}T\right)$$

Mécanique

$$\delta\psi_1 = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}) - (\delta F + S\delta T)$$

Réversibilité thermodynamique $\delta\psi = 0$

Réversibilité Thermique $\delta\psi_2 = 0$

$$\frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{\text{Grad}}T = 0$$

En particulier

$T = Cte$ Isotherme

$q = 0$ Adiabatique

Réversibilité Mécanique $\delta\psi_1 = 0$

$$dF = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}d\boldsymbol{\varepsilon}) - SdT$$

Élasticité parfaite

En Isotherme :

$$dF = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}d\boldsymbol{\varepsilon})$$