Contraintes et déformations en polaire

1°) Considérons le problème plan en coordonnées polaires r, θ. Au point A le déplacement vaut $\vec{u}_A$. A l'extrémité des deux segments perpendiculaires AB et AC les déplacements valent respectivement $\vec{u}_B$ et $\vec{u}_C$. Les longueurs des segments AB et BC sont respectivement :

$$AB = dr \qquad AC = rd\theta$$

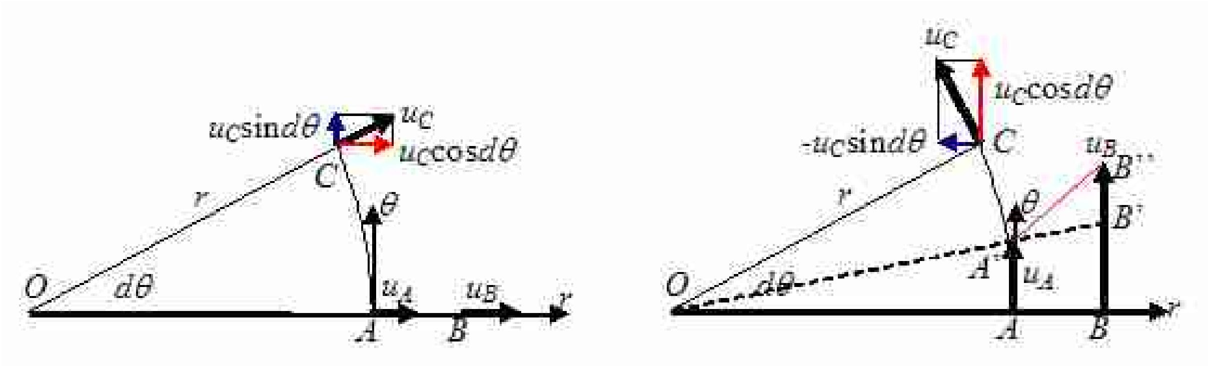


FIG. 1 – A gauche déplacement radial et à droite déplacement circonférentiel

Pour un **déplacement radial seul** :
Les composantes des déplacements selon r et θ aux points A, B, C valent dans le repère initial r, θ du point A :

$$\begin{array}{lllll} \text{Composantes selon } r & u_{A_r} = u_r & u_{B_r} = u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr & u_{C_r} = (u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta) \cos d\theta \\ \text{Composantes selon } \theta & u_{A_\theta} = 0 & u_{B_\theta} = 0 & u_{C_\theta} = (u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta) \sin d\theta \end{array}$$

De la définition du gradient de déplacement il en résulte :

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u_r}{dr} & \frac{\partial u_r}{rd\theta} \\ \frac{\partial u_\theta}{dr} & \frac{\partial u_\theta}{rd\theta} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \varepsilon_{rr} & \frac{\partial u_r}{rd\theta} \\ \frac{\partial u_\theta}{dr} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{u_{B_r} - u_{A_r}}{AB} & \frac{u_{C_r} - u_{A_r}}{AC} \\ \frac{u_{B_\theta} - u_{A_\theta}}{AB} & \frac{u_{C_\theta} - u_{A_\theta}}{AC} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{rd\theta}[(u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta) \cos d\theta - u_r] \\ 0 & \frac{1}{rd\theta}(u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta) \sin d\theta \end{array} \right| \approx \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ 0 & \frac{u_r}{r} \end{array} \right|$$

dans la limite des petites déformations pour lesquelles on ne conserve que les termes du premier ordre en dr et $d\theta$ avec $\cos d\theta \approx 1$ et $\sin d\theta \approx d\theta$.

Pour un **déplacement circonférentiel seul** :
Les composantes des déplacements selon r et θ aux points A, B, C valent dans le repère initial r, θ du point A :

$$\begin{array}{llll} \text{Composantes selon } r & u_{A_r} = 0 & u_{B_r} = 0 & u_{C_r} = -(u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta) \sin d\theta \\ \text{Composantes selon } \theta & u_{A_\theta} = u_\theta & u_{B_\theta} = u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr & u_{C_\theta} = (u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta) \cos d\theta \end{array}$$

De la définition du gradient de déplacement il en résulte :

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u_r}{dr} & \frac{\partial u_r}{rd\theta} \\ \frac{\partial u_\theta}{dr} & \frac{\partial u_\theta}{rd\theta} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{u_{B_r} - u_{A_r}}{AB} & \frac{u_{C_r} - u_{A_r}}{AC} \\ \frac{u_{B_\theta} - u_{A_\theta}}{AB} & \frac{u_{C_\theta} - u_{A_\theta}}{AC} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 0 & -\frac{1}{rd\theta}(u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta) \sin d\theta \\ \frac{1}{dr}[(u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr) - u_\theta] & \frac{1}{rd\theta}[(u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta) \cos d\theta - u_\theta] \end{array} \right| \approx \left| \begin{array}{cc} 0 & -\frac{u_\theta}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{d\theta} \end{array} \right|$$

dans la limite des petites déformations pour lesquelles on ne conserve que les termes du premier ordre en dr et $d\theta$ avec $\cos d\theta \approx 1$ et $\sin d\theta \approx d\theta$.

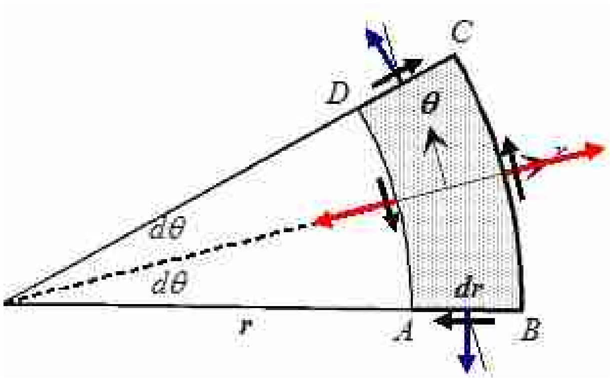
Le tenseur des déformations étant la partie symétrique du gradient de déplacement, en additionnant composante par composante les deux résultats ci-dessus on obtient finalement :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(r, \theta) = \left| \begin{array}{cc} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2}\{\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\} \\ \frac{1}{2}\{\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \end{array} \right|$$

Lors d'un déplacement radial seul, le terme $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$ correspond à l'effet géométrique propre à tout système à symétrie de révolution qui impose une variation de périmètre associée à toute variation de rayon. Lors d'un accroissement u_r du rayon r, le périmètre $P = 2\pi r$ s'accroît de $dP = 2\pi u_r$ et induit une déformation circonférentielle $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{dP}{P} = \frac{u_r}{r}$.

Lors d'un déplacement circonférentiel seul, si le point A subit un déplacement tangentiel AA', la droite OAB devient en l'absence de toute déformation la droite $OA'B'$ et le glissement vrai du segment AB doit se mesurer non pas à partir de AB mais à partir de $A'B'$ déduit de AB par une rotation de corps rigide d'amplitude $\frac{AA'}{OA} = \frac{u_A}{r}$. Le déplacement relatif du point B par rapport au point A responsable du glissement du segment AB doit se mesurer à partir du point d'intersection B' du vecteur u_B avec la droite (en pointillé) issue de l'origine et passant par l'extrémité A' du vecteur u_A. En effet, BB'' se décompose en $BB' = \frac{AA'}{OA}OB = u_\theta \frac{r+dr}{r}$ rotation de corps rigide n'induisant pas de déformation et du terme de glissement $B'B''$.

2°) Equation de l'équilibre.



Facette	Force normale	Force tangentielle
Facette AD	$-[\sigma_{rr}]2rd\theta$	$-[\sigma_{r\theta}]2rd\theta$
Facette DC	$[\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}d\theta]dr$	$[\sigma_{r\theta} + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}d\theta]dr$
Facette CB	$[\sigma_{rr} + \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}dr]2(r+dr)d\theta$	$[\sigma_{r\theta} + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}dr]2(r+dr)d\theta$
Facette BA	$-[\sigma_{\theta\theta} - \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}d\theta]dr$	$-[\sigma_{r\theta} - \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}d\theta]dr$

Projetons sur les axes r et θ en statique et en l'absence de forces de volume :

$$\text{Projection sur } r \quad [F_n(AD) + F_n(CB)] + [F_t(DC) + F_t(BA)]\cos(d\theta) + [-F_n(DC) + F_n(BA)]\sin(d\theta) = 0$$
$$\text{Projection sur } \theta \quad [F_t(AD) + F_t(CB)] + [F_t(DC) - F_t(BA)]\sin(d\theta) + [F_n(DC) + F_n(BA)]\cos(d\theta) = 0$$

Comme, en se limitant aux termes du premier ordre en dr et $d\theta$ avec $\cos(d\theta) \approx 1$ et $\sin(d\theta) \approx d\theta$:

$$F_n(CB) + F_n(AD) = [\sigma_{rr} + \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}dr]2(r+dr)d\theta - [\sigma_{rr}]2rd\theta \approx [\sigma_{rr} + r\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}]2drd\theta$$
$$(F_t(DC) + F_t(BA))\cos(d\theta) = \{[\sigma_{r\theta} + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}d\theta]dr - [\sigma_{r\theta} - \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}d\theta]dr\}\cos(d\theta) \approx \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}2drd\theta$$
$$(-F_n(DC) + F_n(BA))\sin(d\theta) = \{-[\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}d\theta]dr - [\sigma_{\theta\theta} - \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}d\theta]dr\}\sin(d\theta) \approx -\sigma_{\theta\theta}2drd\theta$$

$$F_t(CB) + F_t(AD) = [\sigma_{r\theta} + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}dr]2(r+dr)d\theta - [\sigma_{r\theta}]2rd\theta \approx [\sigma_{r\theta} + r\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}]2drd\theta$$
$$(F_t(DC) - F_t(BA))\sin(d\theta) = \{[\sigma_{r\theta} + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}d\theta]dr + [\sigma_{r\theta} - \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}d\theta]dr\}\sin(d\theta) \approx \sigma_{r\theta}2drd\theta$$
$$(F_n(DC) + F_n(BA))\cos(d\theta) = \{[\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}d\theta]dr - [\sigma_{\theta\theta} - \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}d\theta]dr\}\cos(d\theta) \approx \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}2drd\theta$$

Il en résulte :

$$\text{Projection sur } r \quad \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$
$$\text{Projection sur } \theta \quad \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

3°) Lorsque la **géométrie** et le **chargement** présentent une symétrie cylindrique l'invariance par rotation implique que les grandeurs physiques ne peuvent pas dépendre de la variable θ. La seule composante de déplacement est la composante radiale u_r. Pour la même raison, il ne peut y avoir de composante de déformation $\varepsilon_{r\theta}$ mais la symétrie n'interdit pas l'existence d'une composante $\varepsilon_{\theta\theta}$ non nulle ne dépendant que de la variable r. Il en sera de même pour les composantes du tenseur des contraintes. L'application de ces règles de symétrie conduit, dans le cas d'un matériau élastique linéaire isotrope $\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$ aux simplifications suivantes :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} \end{vmatrix} \qquad \bar{\bar{\sigma}} = \begin{vmatrix} \sigma_{rr} & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}) + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 \\ 0 & \lambda(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}) + 2\mu\frac{u_r}{r} \end{vmatrix}$$

L'équation de l'équilibre est automatiquement satisfaite en projection sur l'axe θ et sa projection sur l'axe r se réduit à :

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \qquad \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \lambda\frac{1}{r}(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r}) \qquad \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 2\mu\frac{1}{r}(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r})$$

conduisant à l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

dans laquelle u désigne pour des raisons de simplification d'écriture, la composante radiale u_r seule composante du champ de déplacement.
Du fait de la symétrie radiale de la géométrie et du chargement on s'attend à ce que le déplacement u soit proportionnel à r, le coefficient de proportionnalité pouvant lui même être une fonction de r d'où le changement de variable $u = fr$ qui conduit à :

$$\frac{du}{dr} = f + r\frac{df}{dr} \quad \frac{d^2u}{dr^2} = r\frac{d^2f}{dr^2} + 3\frac{df}{dr} \quad \frac{f''}{f'} = -\frac{3}{r} \quad \mathrm{Ln}(\frac{f'}{C}) = -3\mathrm{Ln}r \quad f' = \frac{C}{r^3} \qquad f = \frac{D}{r^2} + F \quad u = \frac{D}{r} + Fr$$

Il en résulte immédiatement :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{vmatrix} F - \frac{D}{r^2} & 0 \\ 0 & F + \frac{D}{r^2} \end{vmatrix} \quad \bar{\bar{\sigma}} = \begin{vmatrix} 2(\lambda + \mu)F - 2\mu\frac{D}{r^2} & 0 \\ 0 & 2(\lambda + \mu)F + 2\mu\frac{D}{r^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B - \frac{A}{r^2} & 0 \\ 0 & B + \frac{A}{r^2} \end{vmatrix}$$

$$\text{avec} \begin{cases} B = 2(\lambda + \mu)F \\ A = 2\mu D \end{cases}$$