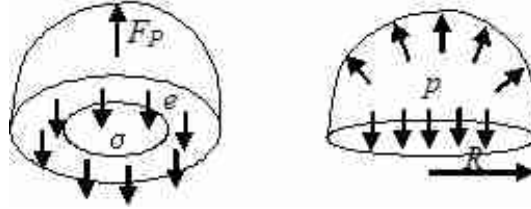


Le ballon de Baudruche

1°) La membrane du ballon étant mince ($e \ll R$) on pourra considérer que la contrainte de traction dans l'épaisseur de la membrane est constante, égale à σ . En coupant la sphère en deux demi-sphères, la résultante F_P des forces de surpression p sur la demi-sphère doit équilibrer la résultante F_σ des forces de contrainte agissant sur l'anneau de coupe.



En fermant la demi-sphère par un fond plat, l'équilibre des forces de pression sur la demi-sphère et sur le fond plat impose :

$$F_P = \int_{\text{demi-sphère}} p dS = \int_0^R p 2\pi r dr = \pi R^2 p$$

L'intégration de la contrainte σ constante sur la surface $\pi R e$ de l'anneau conduit à :

$$F_\sigma = \int_R^{R+e} \sigma 2\pi r dr \approx 2\pi R e \sigma$$

L'égalité $F_P = F_\sigma$ conduit à la relation :

$$\sigma = \frac{R}{2e} p \quad p = \frac{2e}{R} \sigma$$

La contrainte de traction dans la membrane est amplifiée du facteur $\frac{R}{2e}$ par rapport à la surpression p . Le coefficient de Poisson de la baudruche étant égal à $1/2$, la baudruche se déforme à volume constant soit :

$$V \approx 4\pi R^2 e = 4\pi R_0^2 e_0 \quad \sigma = \frac{R_0}{2e_0} \frac{R^3}{R_0^3} p \quad p = \frac{2e_0}{R_0} \frac{R_0^3}{R^3} \sigma$$

2°) Il faut ici raisonner en déformation vraie pour prendre en compte la non linéarité d'origine géométrique associée à la grande déformabilité du caoutchouc. La relation entre la déformation vraie ε et R se déduit de l'intégration de $d\varepsilon = \frac{dR}{R}$, soit, avec la condition initiale $\varepsilon = 0$ quand $R = R_0$:

$$\frac{R}{R_0} = \exp(\varepsilon) \quad \varepsilon = \text{Ln}\left(\frac{R}{R_0}\right) = \frac{1}{3} \text{Ln}\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

3°) Comme en zone linéaire (grande déformations) $\sigma = E\varepsilon = E \text{Ln}\left(\frac{R}{R_0}\right)$ on obtient la relation cherchée $p = f(R)$ en fonction du rayon R ou du volume V du ballon :

$$p(R) = E \frac{2e_0}{R_0} \frac{R_0^3}{R^3} \text{Ln}\left(\frac{R}{R_0}\right) \quad p(V) = E \frac{2e_0}{3R_0} \frac{V_0}{V} \text{Ln}\left(\frac{V}{V_0}\right) \quad \sigma(R) = E \text{Ln}\left(\frac{R}{R_0}\right) = \frac{1}{3} E \text{Ln}\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

4°) Elle présente un maximum de surpression p_C pour un rayon de gonflage R_C tel que $\frac{dp}{dR} = 0$, soit :

$$\frac{dp}{p} = -3 \frac{dR}{R} + \frac{dR}{R \text{Ln}\left(\frac{R}{R_0}\right)} = 0 \quad \frac{R_C}{R_0} = \exp\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1,4 \quad \frac{V_C}{V_0} = \exp(1) \approx 2,7$$

$$p_C = E \frac{2e_0}{R_0} \frac{R_0^3}{R_C^3} \text{Ln}\left(\frac{R_C}{R_0}\right) = E \frac{2e_0}{R_0} \frac{\exp(-1)}{3} \approx 0,12 \frac{2e_0}{R_0} \quad \sigma_C = \frac{E}{3}$$

Pour le ballon considéré ($e_0=0,2$ mm, $R_0=20$ mm, $E=2$ MPa, $\eta=0,5$ et $\sigma_P=2$ MPa) la pression maximale p_C , obtenue pour le rayon de gonflage $R_C=28$ mm, vaut $p_C \approx 4,9 \cdot 10^{-3}$ Mpa soit 49 cm H₂O. La contrainte dans la membrane vaut alors $\sigma_C = 0,67$ MPa. Elle est inférieure à la contrainte plateau

σ_P traduisant le fait que le pic se produit bien en régime élastique linéaire en grande déformation et non pas sur le plateau de contrainte.

Ce résultat explique que lorsqu'on gonfle à la bouche un ballon de baudruche de rayon au repos R_0 on constate que la pression à exercer est initialement élevée. Il faut souffler fort pour amorcer le gonflage puis elle diminue rapidement au fur et à mesure que le rayon du ballon croît au delà d'un rayon critique R_C . P_C étant inversement proportionnelle à R_0 , le gonflage d'une baudruche de petit rayon est quasiment impossible pour un enfant.

5°) Cette loi d'évolution de la pression reste valable jusqu'à ce que le rayon du ballon atteigne la valeur R_P telle que $\sigma(R_P) = \sigma_P$ soit, avec $\sigma(R) = E \ln(\frac{R}{R_0})$ et $\sigma = \frac{R_0 R^3}{2e_0} p$:

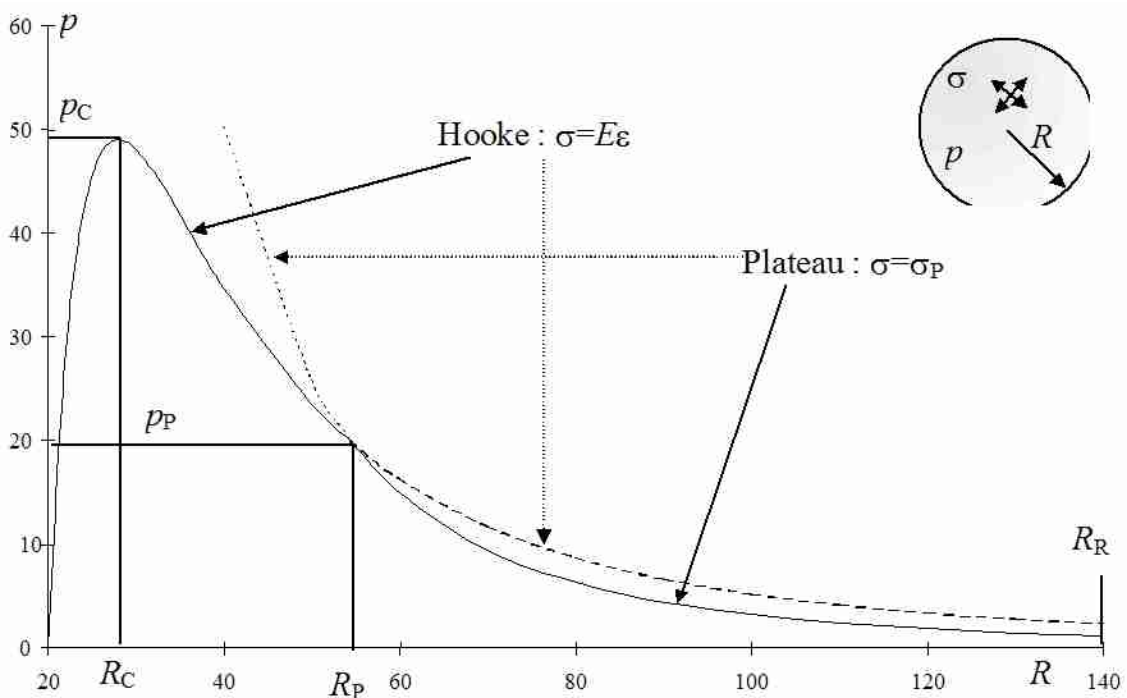
$$\frac{R_P}{R_0} = \exp\left(\frac{\sigma_P}{E}\right) \quad \frac{V_P}{V_0} = \exp\left(3\frac{\sigma_P}{E}\right) \quad p(R_P) = p_P = \frac{2e_0 R_0^3}{R_0 R_P^3} \sigma_P = \frac{2e_0}{R_0} \sigma_P \exp\left(-3\frac{\sigma_P}{E}\right) = \frac{2e_0}{R_0} \sigma_P \exp\left(-3\frac{\sigma_P}{E}\right) \frac{V_0}{V_P}$$

La pression de changement de régime élastique p_P est obtenue pour le rayon de gonflage $R_P \approx 54$ mm tel que $\frac{R_P}{R_0} = \exp(1) \approx 2,7$ ou $\frac{V_P}{V_0} = \exp(3) \approx 20$. Elle vaut $p_P \approx 2.10^{-3}$ Mpa soit 20 cm H₂O. Au delà de R_P , la contrainte étant constante, égale à σ_P , la pression diminue comme :

$$p(R) = \frac{2e_0 R_0^3}{R_0 R^3} \sigma_P = \frac{2e_0 R_0^3 R_P^3}{R_0 R_P^3 R^3} \sigma_P = \frac{2e_0}{R_0} \sigma_P \exp\left(-3\frac{\sigma_P}{E}\right) \frac{R_P^3}{R^3} = p_P \frac{R_P^3}{R^3} = p_P \frac{V_P}{V}$$

6°) La phase de durcissement final se termine par la rupture lorsque le ballon atteint le rayon R_R tel que $\frac{R_R}{R_0} - 1 \approx 6$, soit R_R 140 mm.

7°) Courbe $p = f(R)$.



p_1 et p_2 désignant les surpressions dans les deux ballons de volume initiaux respectivement V_1 et V_2 et P désignant la pression atmosphérique, en supposant valable l'équation $PV = nRT$ des gaz parfaits pour l'air, le ballon **1** contient n_1 moles de gaz et le ballon **2** contient n_2 moles de gaz vérifiant :

$$(P + p_1)V_1 = n_1RT \quad (P + p_2)V_2 = n_2RT$$

La mise en communication des ballons conduit à l'égalité des pressions $P + p$ avec conservation du nombre de moles de gaz $n = n_1 + n_2$. Le volume total final $V_f = V_1' + V_2'$ des deux ballons (le ballon 1 passe du volume V_1 au volume V_1' et le ballon 2 du volume V_2 au volume V_2') vérifiant la relation :

$$(P + p)V_f = nRT$$

Il est donc nécessaire de considérer les trois cas suivants :

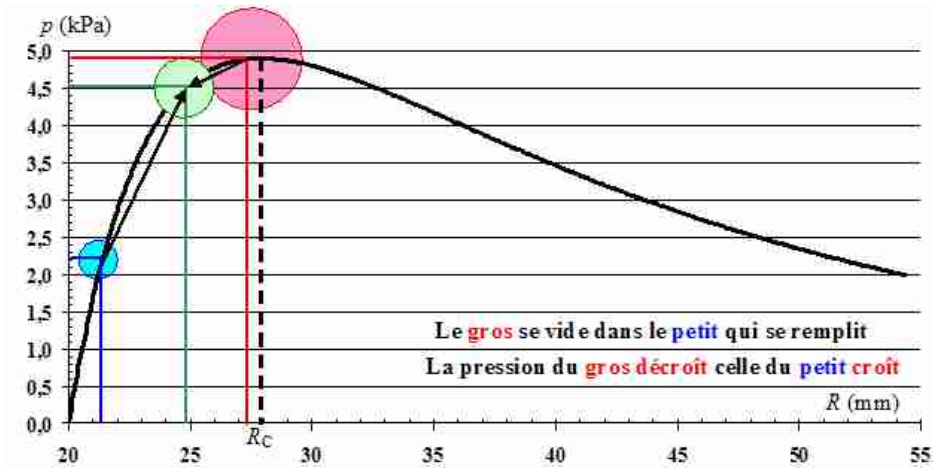


FIG. 1 – Deux ballons de volumes situés avant le pic de surpression p_C ($V_1, V_2 < V_C$)

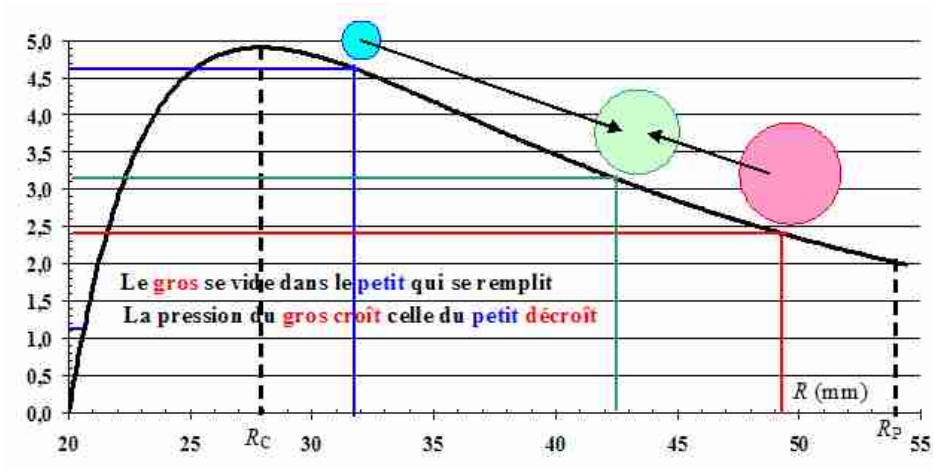


FIG. 2 – Deux ballons de volumes situés après le pic de surpression p_C ($V_1, V_2 > V_C$)

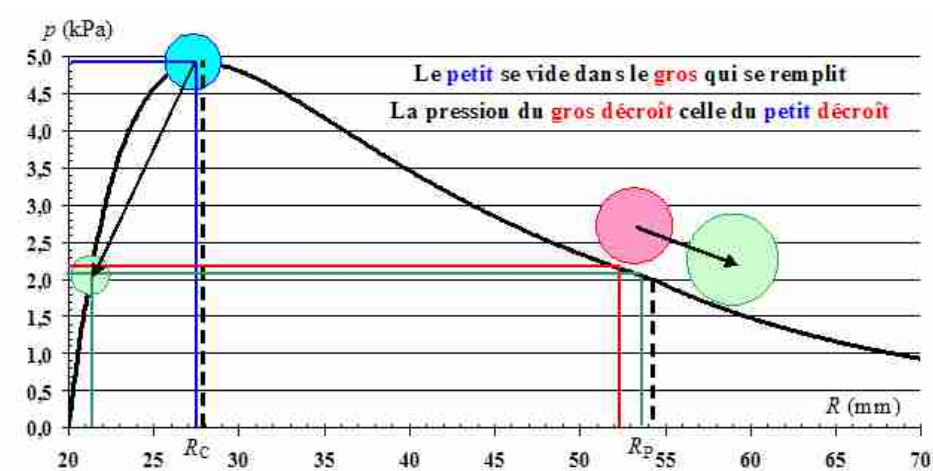


FIG. 3 – **Paradoxe** : Deux ballons de volumes situés de part et d'autre du pic de surpression p_C . La pression finale est inférieure à la plus petite des pressions initiales.