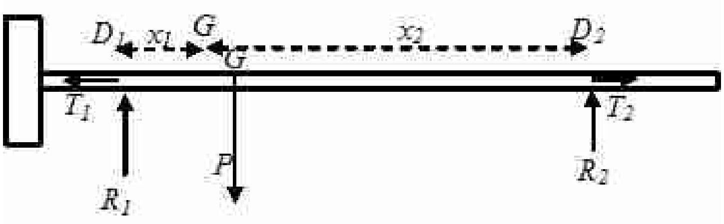
Le stick-slip

Modèle du balai



1°) Les conditions d'équilibre imposent $R_1 + R_2 = P$ (résultante nulle) et $x_1 R_1 = x_2 R_2$ (nullité du moment pris par rapport à G). Il en résulte les relations :

$$R_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} P \qquad R_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} P$$

2°) Etat initial $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$ avec $x_2^0 > x_1^0$ donc $R_1 > R_2$. Les résistances limites au glissement doigt-manche seront donc :

$$T_1 = \mu_S R_1 \qquad T_2 = \mu_S R_2 \qquad T_1 > T_2$$

Lors du rapprochement des doigts, le glissement interviendra au niveau du doigt D_2 qui présente la résistance limite au glissement la plus faible.
3°) Lors du glissement du doigt D_2 le coefficient de frottement prend sa valeur dynamique μ_D et la résistance au glissement du doigt D_2 devient $T_2 = \mu_D R_2$.
4°) Mais, si la distance $x_1 = x_1^0$ reste constante, la distance x_2 diminue depuis x_2^0 jusqu'à une valeur $x_2^1 < x_2^0$. En effet, comme $\frac{R_2}{R_1} = \frac{x_1}{x_2}$, x_2 diminuant à $x_1 = x_1^0$ Cte, R_2 décroît **moins** vite que R_1. Il en va de même de T_2 par rapport à T_1. Le glissement du doigt D_2 s'arrêtera donc lorsque $T_2 = T_1$, soit encore $\mu_D R_2 = \mu_S R_1$, c'est-à-dire au point x_2^1 tel que :

$$\mu_D \frac{x_1^0}{x_1^0 + x_2^1} = \mu_S \frac{x_2^1}{x_1^0 + x_2^1} \qquad \frac{\mu_D}{\mu_S} = \frac{x_2^1}{x_1^0}$$

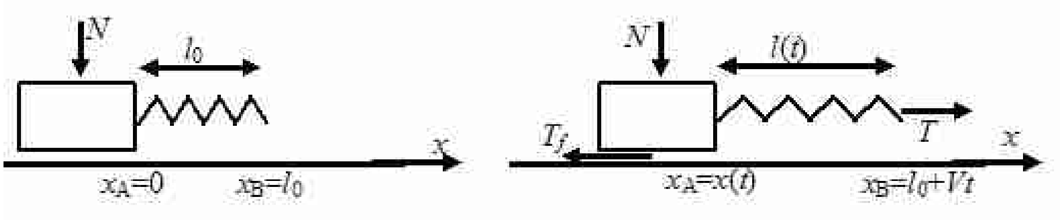
Au point d'arrêt, on obtient la relation qui permet de déterminer simplement le rapport des coefficients de frottement dynamique et statique.
5°) A ce moment, la friction statique se remobilise et $T_2 = \mu_D R_2 > T_1 = \mu_D R_1 = \mu_S R_2$. Cette fois, la résistance au glissement du doigt D_2 devient supérieure à celle du doigt D_1 et ce dernier se met à glisser le long du manche. Le raisonnement précédent s'applique en tout point, mais cette fois x_1 décroît à $x_2 = x_2^1$ constant jusqu'au point x_1^1 tel que $\frac{\mu_D}{\mu_S} = \frac{x_2^1}{x_1^1}$. Puis le cycle recommence avec un nouveau glissement du doigt D_1.
On obtient donc une succession d'alternance de glissement avec des points d'arrêt vérifiant :

$$x_2^i = \frac{\mu_D}{\mu_S} x_1^{i-1} \quad x_1^i = \frac{\mu_D}{\mu_S} x_2^i \quad \Rightarrow \quad x_2^i = \frac{\mu_D^2}{\mu_S^2} x_2^{i-1} \quad x_1^i = \frac{\mu_D^2}{\mu_S^1} x_1^{i-1} \text{ avec } \frac{\mu_D}{\mu_S} < 1$$

conduisant à une convergence vers $x_1 = x_2 = 0$, c'est-à-dire vers le centre de gravité G du balai.

Oscillation de stick-slip

1°) La force de résistance maximale au glissement toujours dirigée vers les x négatifs est donnée par $T_{fS} = \mu_S N = \mu_S mg$.
Au delà de t=0, la position de l'extrémité A de la masse est $x_A = x$ et celle de l'extrémité B du ressort $x_B = l_0 + Vt$. Sa longueur l augmente comme $l = x_B - x_A = l_0 + Vt - x$ et la traction qu'il exerce sur la masse varie selon $T = k(x_B - x_A - l_0) = kl - l_0 = k(Vt - x)$. Pour un temps $t \geq 0$ la



traction T reste inférieur à T_{fS}, la masse est immobile, $xA = x = 0$ et la traction T augmente comme $T = k(Vt - x)$. La masse commencera à glisser au temps t_0 tel que :

$$T_{max} = T(t_0) = T_{fS} \qquad kVt_0 = \mu_S N \qquad x = 0 \qquad t_0 = \frac{\mu_S N}{kV}$$

2°) Au delà de t_0 la masse est soumise à la traction $T = k(Vt-x)$ du ressort, à la résistance dynamique au glissement $T_{fD} = \mu_D N$ et à la force d'inertie de sorte que son mouvement est régi par l'équation différentielle :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = T - T_{fD} = k(Vt - x) - \mu_D N \qquad x(t_0) = 0 \qquad \frac{dx}{dt}(t_0) = 0$$

En faisant apparaître le temps t_0 dans cette équation, elle s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}V(t - t_0) + (\mu_S - \mu_D)g \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \omega^2 V(t - t_0) + (\mu_S - \mu_D)g$$

expression dans laquelle apparaît la pulsation propre $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ de vibration libre de la masse m reliée au ressort de raideur k.
3°) Sa solution générale est de la forme $x = C_1 \sin(\omega(t-t_0)) + C_2 \cos(\omega(t-t_0)) + V(t-t_0) + \frac{(\mu_S-\mu_D)g}{\omega^2}$. Tenant compte des conditions initiales, le mouvement de la masse est donné pour $t > t_0$ par :

$$x = -\frac{V}{\omega}\sin(\omega(t - t_0)) + \frac{\mu_S - \mu_D}{\omega^2}g[1 - \cos(\omega(t - t_0))] + V(t - t_0)$$

Ce mouvement se poursuit selon cette loi jusqu'au temps t_1 pour lequel la vitesse s'annule, remobilisant la résistance statique au glissement et immobilisant à nouveau la masse m. Compte tenu de :

$$\frac{dx}{dt}(t_1) = -V\cos(\omega(t_1 - t_0)) + (\mu_S - \mu_D)\frac{g}{\omega}\sin(\omega(t_1 - t_0)) + V = 0$$

le temps t_1 est défini par :

$$\tau = \frac{1 - \cos(\omega(t_1 - t_0))}{\sin(\omega(t_1 - t_0))} = \mathrm{tg}[\frac{1}{2}\omega(t_1 - t_0)] = -\frac{(\mu_S - \mu_D)g}{\omega V} \qquad t_1 = t_0 + \frac{2}{\omega}[\pi - \mathrm{arctg}(\frac{(\mu_D - \mu_S)g}{\omega V})]$$

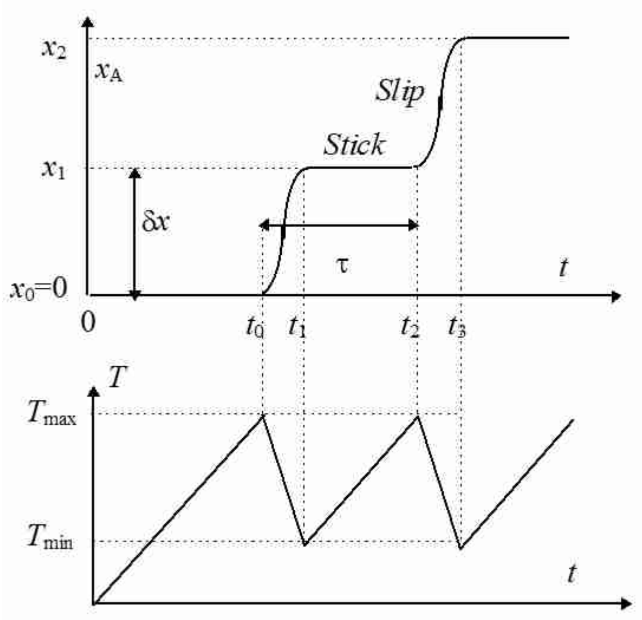
En $t = t_1$, compte tenu des relations précédentes définissant $t_1 - t_0$, la masse s'immobilise en position x_1 et la traction du ressort prend la valeur $T_{min} = T(t_1)$ donnés par :

$$x_1 = V(t_1 - t_0) + 2\tfrac{(\mu_S-\mu_D)g}{\omega^2} = V(t_1 - t_0) + 2\tfrac{(\mu_S-\mu_D)mg}{k}$$
$$T_{min} = k(Vt_1 - x_1) = k(Vt_0 + V(t_1 - t_0) - x_1) = \mu_S N + 2(\mu_D - \mu_S)N = (2\mu_D - \mu_S)N$$

En effet, en reprenant la définition de τ ci-dessus on peut écrire :

$$x - V(t - t_0) = -\tfrac{V}{\omega}\sin(\omega(t - t_0)) + \tfrac{\mu_S-\mu_D}{\omega^2}g[1 - \cos(\omega(t - t_0))] = -\tfrac{V}{\omega}(\tfrac{2\tau}{1+\tau^2} - \tfrac{(\mu_S-\mu_D)g}{\omega V}[1 - \tfrac{1-\tau^2}{1+\tau^2}])$$
$$= -\tfrac{V}{\omega}(\tfrac{2\tau}{1+\tau^2} + \tau\tfrac{2\tau^2}{1+\tau^2}) = -2\tfrac{V}{\omega}\tau = 2\tfrac{V}{\omega}\tfrac{(\mu_S-\mu_D)g}{\omega V} = 2\tfrac{(\mu_S-\mu_D)g}{\omega^2}$$

4°) Pour $t_1 \leq t \leq t_2$, la masse est à nouveau immobile en $x = x_1$ et le ressort se tend progressivement depuis $T = T_{min} = (2\mu_D - \mu_S)N$ jusqu'à ce que sa tension $T = k(Vt - x_1) = k(V(t - t_1) + Vt_1 - x_1) =$



$kV(t-t_1)+T_{min}$ atteigne à nouveau la limite de résistance statique au frottement $T_{max} = T_{fS} = \mu_S N$ ce qui permet de calculer le temps t_2 au bout duquel elle va à nouveau se mettre à glisser :

$$t_2 - t_1 = \frac{T_{max} - T_{min}}{kV} = 2\frac{\mu_S - \mu_D}{kV}N = 2g\frac{\mu_S - \mu_D}{\omega^2 V}$$

Au delà, le cycle recommence de manière périodique comme le montre la figure.

5°) La période du cycle est égale à $t_2 - t_0$ et les durées $t_2 - t_1$ de la phase *stick* et $t_1 - t_0$ de la phase *slip* sont reliées par $\frac{1}{2}\omega(t_1 - t_0) = \pi - \mathrm{arctg}[\frac{1}{2}\omega(t_2 - t_1)]$. L'incrément de déplacement à chaque cycle est donné par :

$$\delta x = x_1 - x_0 = V(t_1 - t_0) + 2(\mu_S - \mu_D)g\frac{m}{k}$$

En général, la période de *slip* est beaucoup plus courte que la période de *stick* (*cf.* tremblements de terre) de sorte que l'incrément de déplacement à chaque cycle donné par :

$$\delta x = V(t_1 - t_0) + 2(\mu_S - \mu_D)g\frac{m}{k} \approx 2(\mu_S - \mu_D)g\frac{m}{k}$$

Comme la tension du ressort varie au cours d'un cycle entre $T_{max} = \mu_S N$ et $T_{min} = (2\mu_D - \mu_S)N$ l'incrément de déplacement s'écrit aussi sous la forme :

$$\delta x = \frac{T_{max} - T_{min}}{k}$$