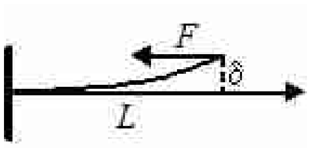
Tiges et Clous

1°) A partir de l'équation de la flexion :

$$\frac{EI}{R} \approx EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

en appelant δ la flèche prise par la poutre lorsque la force F atteint la charge critique F_C, estimons les différents paramètre :

$$M \sim F_C\delta \qquad \frac{1}{R} \approx \frac{d^2y}{dx^2} \sim \frac{\delta}{L^2} \quad \Rightarrow \quad F_C \sim \frac{EI}{L^2} \qquad F_C = k\frac{EI}{L^2} \quad k \text{ de l'ordre de l'unité}$$

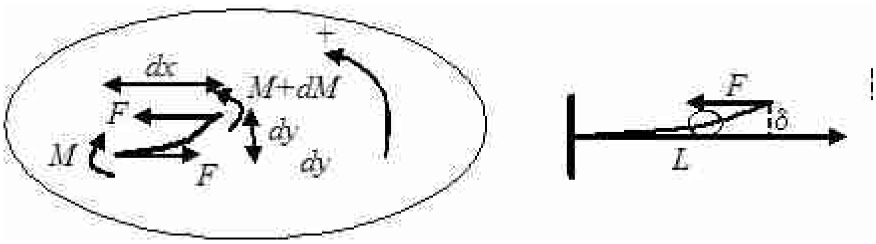


2°) Dans le cas d'une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre extrémité, le bilan mécanique local s'écrit :

$$-M + Fdy + M + \frac{dM}{dx}dx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dM}{dx} = -F\frac{dy}{dx}$$

En dérivant l'équation de flexion des poutres $\frac{EI}{R} \approx EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$ on obtient l'équation différentielle :

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} + F\frac{dy}{dx} = 0$$



A l'extrémité x=0 l'encastrement impose la nullité du déplacement $y(0) = 0$ et celle de la pente $\frac{dy}{dx}(0) = 0$ (la direction de la poutre reste perpendiculaire à l'encastrement). A l'extrémité libre de la poutre $x = L$, le moment fléchissant est nul donc le rayon de courbure local R est infini et la courbure est nulle : $\frac{d^2y}{dx^2}(L) = 0$.
L'intégration conduit à :

$$\frac{dy}{dx} = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

La condition $\frac{dy}{dx}(0) = 0 \Rightarrow A = 0$, soit $\frac{dy}{dx} = B\sin(\omega x)$ et $y = -\frac{B}{\omega}\cos(\omega x) + C$. La condition $y(0) = 0$ $\Rightarrow B = C\omega$ et la solution devient $y = C(1 - \cos(\omega x))$. La condition $\frac{d^2y}{dx^2}(L) = 0 \Rightarrow$:
- Soit $C = 0$ si la force $F < F_C$ seuil de flambement et la poutre est en compression.
- Soit $\cos(\sqrt{\frac{F_C}{EI}}L) = 0$ lorsque l'on atteint le seuil de flambement et la poutre fléchit.

De cette dernière condition qui s'écrit $\sqrt{\frac{F_C}{EI}}L = \frac{\pi}{2}$ on tire la force critique de flambement :

$$F_C = \frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{L^2}$$

En résolvant exactement le problème, on retrouve bien les dépendances dimensionnelles de F_C : proportionnalité de F_C avec E, I et $\frac{1}{L^2}$ trouvées précédemment. On détermine également la valeur exacte

du préfacteur $k = \frac{\pi^2}{4} \approx$2,47.
3°) Pour une tige de diamètre ϕ de masse volumique ρ et de longueur L, le poids propre est égal à $\rho g \frac{\pi}{4}\phi^2 L$. En considérant que le poids réparti est équivalent au poids total appliqué à mi-hauteur et en appliquant le résultat précédent le flambement interviendra pour :

$$\rho g \frac{\pi}{4}\phi^2 L = \frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{(\frac{L}{2})^2} \text{ soit pour une longueur de tige } L = \sqrt[3]{\frac{4\pi EI}{\rho g \phi^2}}$$

Pour une tige pleine à section circulaire $I = \frac{\pi}{64}\phi^4$. Finalement :

$$L^3 = \frac{\pi^2}{16}\frac{E\phi^2}{\rho g} \qquad L \sim \phi^{\frac{2}{3}} \qquad \phi \sim L^{\frac{3}{2}} \qquad \frac{\phi}{L} \sim \sqrt{L}$$

Il en résulte que pour éviter le flambement la hauteur maximale L d'une tige doit varier comme son diamètre ϕ à la puissance 2/3. L'élancement, caractérisé par le rapport d'aspect $\frac{L}{\phi} \sim \frac{1}{\sqrt{L}}$, sera d'autant plus grand que la hauteur L sera petite. Un arbrisseau sera donc plus élancé qu'un arbre adulte. Lors de sa croissance, le diamètre ϕ du tronc doit croître plus vite que la hauteur L de l'arbre pour éviter le flambement sous poids propre.
4°) Pour le animaux terrestres soumis à l'action de la gravité, la même loi s'applique et l'élancement du squelette d'un gros animal doit être plus faible que celui d'un petit animal. Le squelette d'un homme sera donc plus massif que celui d'une souris.
Par contre, pour les animaux marins, dont la masse volumique est proche de celle de l'eau, la poussée d'Archimède peut s'interpréter comme une réduction de la gravité apparente qui diminue de sa valeur ρg sur terre à la valeur $\Delta\rho g$ dans l'eau. L' effet du poids propre est sensiblement réduit de sorte que l'élancement ne varie quasiment plus avec la taille de l'animal. Le squelette d'une baleine présente donc un élancement voisin de celui d'une petite tortue de mer. Par contre si une baleine s'échoue, l'élancement trop faible de son squelette soumis à la gravité terrestre étant insuffisant pour soutenir son poids, son corps s'écrase et elle meurt rapidement par étouffement.

"y'en a qui s'plient, y'en a qui s'coudent" *Francis Blanche*, canulars téléphoniques.
5°) En appliquant sur la tête du clou une force F, suffisante pour créer une pénétration, le clou va s'enfoncer dans le béton, créant dans ce dernier de fortes contraintes de compression autour du trou. La contrainte maximale supportable par le béton étant σ_b, limite de résistance en compression, la résultante d'étreinte autour d'un clou ayant pénétré le béton sur une profondeur x sera égale à σS, soit, avec $\sigma = \sigma_b$ et $S = 2\pi Rx$, une etreinte $2\pi\sigma_b Rx$. Pour assurer cette pénétration, il aura fallu vaincre la résistance de frottement acier béton sous la charge normale d'étreinte précédente, soit la relation entre la force appliquée F et la profondeur de pénétration x :

$$F(x) = 2\pi\mu\sigma_b Rx$$

6°) D'après les résultats précédents, la force critique de flambement de la parie émergente du clou de longueur $l - x$ vaut $F_C(l-x) = k\frac{E_a I}{(l-x)^2} = k\frac{\pi}{4}\frac{E_a R^4}{(l-x)^2}$. La condition de **non flambement** s'écrit donc $F(x) < F_C(l-x)$, soit :

$$F(x) = 2\pi\mu\sigma_b Rx < F_C(l-x) = k\frac{\pi}{4}\frac{E_a R^4}{(l-x)^2} \qquad \frac{x}{l}(1-\frac{x}{l})^2 < \frac{k}{8}\frac{E_a}{\sigma_b}(\frac{R}{l})^3$$

En introduisant la variable réduite $u = \frac{x}{l}$, la condition de **non flambement** s'écrit :

$$u(1-u)^2 < \frac{k}{8}\frac{E_a}{\sigma_b}(\frac{R}{l})^3 \qquad 0 < u < 1$$

Le maximum de la fonction $u(1-u)^2$ est obtenu au point $(\frac{1}{3}, \frac{4}{27})$. En effet sa dérivée $(1-u)(1-3u)$ s'annule en $u = \frac{1}{3}$. Dès que $\frac{k}{8}\frac{E_a}{\sigma_b}(\frac{R}{l})^3 > \frac{4}{27}$ le clou s'enfonce jusqu'au bout sans flambement. Soit :

$$(\frac{3R}{2l})^3 > \frac{4\mu}{k}\frac{\sigma_b}{E_a} \qquad \frac{R}{l} > \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{4\mu}{k}\frac{\sigma_b}{E_a}} \qquad \frac{R}{l} > \frac{2}{30} \quad \text{avec } k = 4$$

7°) Pour un clou (R=1 mm, l=16 mm) le rapport $\frac{R}{l} = \frac{2}{32} < \frac{2}{30}$, le clou pliera avant de s'enfoncer complètement. La quantité $\frac{k}{8\mu}\frac{E_a}{\sigma_b}(\frac{R}{l})^3$=0,122. La lecture sur la courbe donne alors pour le rapport $u = \frac{x}{l}$ la valeur 0,18. Le clou s'enfoncera donc de $0{,}18l \approx 3$ mm avant de plier.