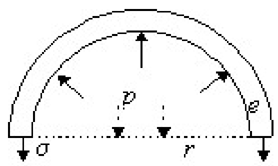
Réservoir sous pression

1°) La contrainte de traction σ qui résiste à la pression interne p exercée sur un cylindre à parois mince est donnée par la formule des chaudronniers :

$$\sigma = p\frac{r}{e} \qquad p = \sigma\frac{e}{r}$$

La résultante des forces de pression sur le demi cylindre est verticale et sa valeur est égale à la résultante des forces de pression sur la base (équilibre du demi-cylindre fermé par un couvercle). Elle vaut donc par unité de longueur $2pr$. Elle est équilibrée la force $2\sigma e$ résultant des contraintes de traction σ réparties sur l'épaisseur et supposées constantes dans l'hypothèse des parois minces ($\frac{e}{r} \ll 1$).



Les deux modes de ruine du récipient si la contrainte σ devient trop forte sont :

$$\text{la plastification : } \sigma_M^{(P)} = \sigma_e \text{ et la rupture brutale : } \sigma_M^{(R)} = \frac{K_c}{\sqrt{\pi a}}$$

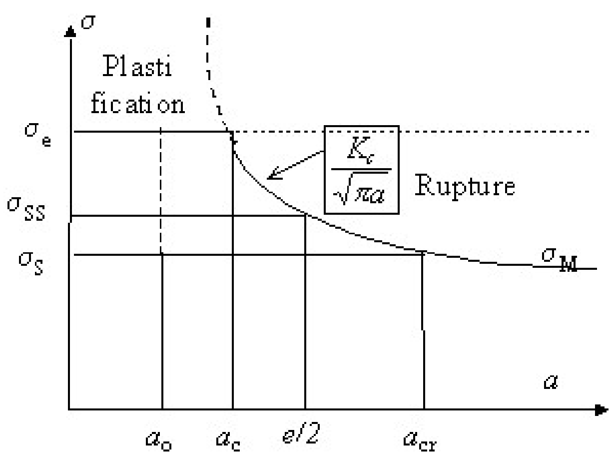
qui limitent la contrainte maximale admissible σ_M aux valeurs ci-dessus, (P) désignant la contrainte de ruine par plastification (indépendante de a) et (R) celle de ruine par rupture (dépendante de a). La contrainte maximale admissible dépend donc de la dimension caractéristique a des défauts selon la loi :

$$\sigma_M(a) = Min(\sigma_M^{(P)}, \sigma_M^{(R)})$$

La valeur a_c correspond au croisement de ces deux lois $\sigma_M^{(P)} = \sigma_M^{(R)}$ et s'exprime par :

$$a_c = \frac{1}{\pi}(\frac{K_c}{\sigma_e})^2$$

C'est une dimension caractéristique du matériau, la dimension caractéristique du défaut qui définit la transition entre le régime de plastification et le régime de rupture.
- Si $a < a_c$ une augmentation de pression induisant une contrainte $\sigma > \sigma_M$ provoque une plastification du réservoir. Une surveillance peut s'effectuer à l'aide de jauges de déformation.
- Si $a > a_c$ une augmentation de pression induisant une contrainte $\sigma > \sigma_M$ provoque une rupture brutale du réservoir avant plastification sans avertissement préalable. Il s'agit là d'un mécanisme très dangereux contre lequel il faut se protéger.



2°) Lors de la construction des réservoirs et avant leur mise en service, ceux-ci subissent d'une part un contrôle (par ultrasons généralement) pour détecter les défauts préexistants et d'autre part un essai d'épreuve sous une pression supérieure à la pression de service envisagée. Cette dernière se détermine à partir du coefficient de sécurité S de manière à ce que la contrainte de traction de service σ_S induite soit égale à $\frac{\sigma_e}{S}$. Le contrôle par ultrasons permet de s'assurer qu'il n'y a pas de défaut préexistant d'une taille supérieure à a_u, taille correspondant à la limite de sensibilité de la méthode (en pratique quelques mm). Pour garantir la sûreté de fonctionnement, on choisira donc un matériau dont la dimension caractéristique de défaut a_c est supérieure à a_u de manière à assurer une éventuelle ruine par plastification (détectable) en évitant les effets catastrophiques d'une rupture brutale.
Acier σ_e=1000 Mpa, K_c=170 Mpa.m$^{1/2}$ a_c=9 mm $> a_u$.
Alu σ_e=400 Mpa, K_c=25 Mpa.m$^{1/2}$ a_c=1 mm $< a_u$.
Les alliages d'aluminium ne sont pas des matériaux surs pour la réalisation de réservoirs sous pression, la dimension caractéristique de défaut a_c étant inférieure à la résolution a_u des systèmes de contrôle, on ne peut garantir, comme dans le cas de l'acier, la livraison d'un réservoir qui ne se rompra pas brutalement en cas de surpression accidentelle.
3°) Après construction le réservoir a été contrôlé de sorte que les plus grands défauts préexistants aient une dimension a_0 inférieure à a_c. Cependant, au cours de sa vie, sous l'action de la fatigue induite par les variations de pression de service, ces défauts vont croître lentement passant d'une dimension initiale a_0 à une dimension supérieure à a_c, rétablissant ainsi un risque de rupture brutale en cas de surpression. Même à pression de service normale créant la contrainte σ_S, la dimension du défaut peut croître jusqu'à la valeur critique a_{cr} qui provoque la rupture brutale. Afin d'accroître la sécurité, on introduit un mécanisme qui provoque une fuite (détectable) du réservoir avant que la dimension du défaut n'ait atteint la valeur critique a_{cr} produisant la rupture brutale, ce qui permet de le mettre à temps hors service. Pour cela il faut donc que l'épaisseur de la paroi e soit inférieure à la taille $2a_{cr}$ du défaut critique, ce qui est bien représenté par la condition $2a_{cr} = S'e$ avec S' coefficient de sécurité (S' >1). En effet, si le défaut de taille initiale $2a_0$ croît jusqu'à atteindre l'épaisseur de la paroi, le réservoir va se mettre à fuir. Cependant, la contrainte de rupture catastrophique :

$$\sigma_{SS} = \frac{K_c}{\sqrt{\pi \frac{e}{2}}}$$

associée à ce défaut de taille e est supérieure à la contrainte de service σ_S. La fissure s'ouvre (d'où fuite) mais ne se propage pas. Le rapport $\frac{P_S}{P_{SS}} = \frac{\sigma_S}{\sigma_{SS}} = \frac{1}{\sqrt{S'}}$; C'est le prix à payer en terme de pression pour ce supplément de sécurité.
4°) La pression p étant reliée à la contrainte σ par $\sigma = p\frac{r}{e}$, compte tenu du coefficient de sécurité S :
- Si $e < 2a_c$:

$$\sigma = \frac{\sigma_e}{S} = \frac{r}{e}p \qquad e(p) = \frac{rS}{\sigma_e}p$$

L'épaisseur e croît linéairement avec la pression p.
- Si $e > 2a_c$:

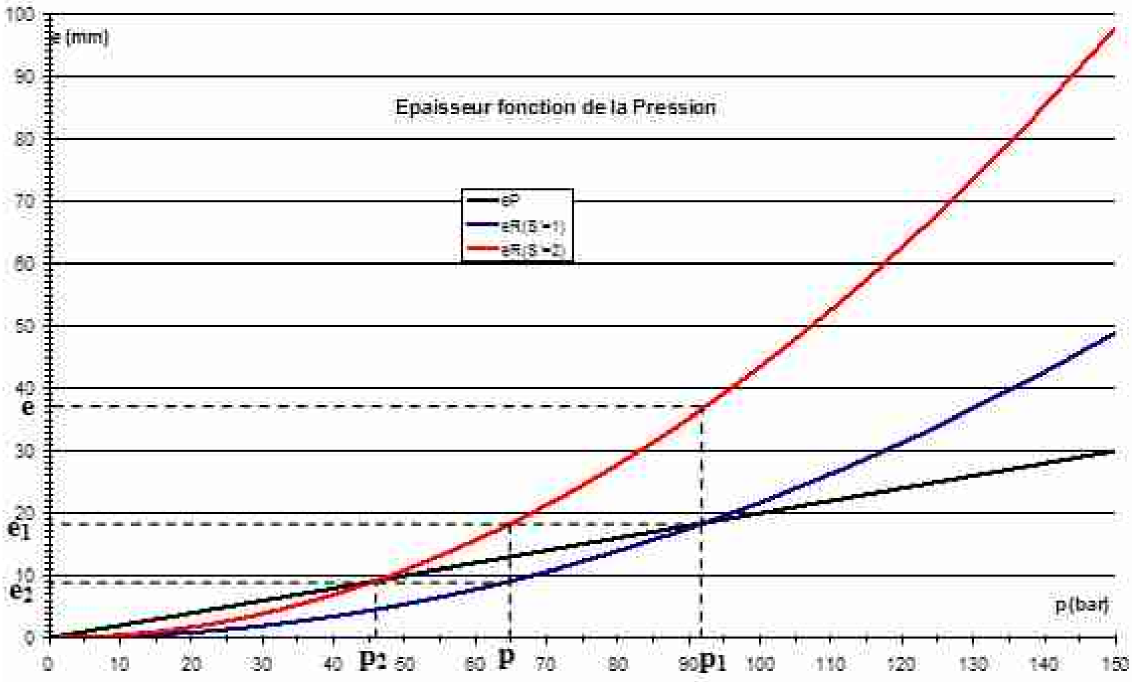
$$\sigma = \frac{K_c}{S\sqrt{\pi e S'/2}} = \frac{r}{e}p \qquad e(p) = \frac{\pi S' S^2 r^2}{2K_c^2}p^2$$

La sécurité s'obtient au prix d'une forte augmentation de l'épaisseur e avec la pression (voir figure).
L'égalité des 2 expressions de e conduit à la pression critique p_c et à l'épaisseur critique e_c de transition :

$$p_c = \frac{2}{\pi r S S'}\frac{K_c^2}{\sigma_e} \qquad e_c = \frac{2a_c}{S'}$$

A.N.
Avec $S' = 1$ $p_c = p_1$=92 bars et $e_c = e_1 = 2a_c$= 18 mm
Avec $S' = 2$ $p_c = p_2$=46 bars et $e_c = e_2 = a_c$= 9 mm

Si on accroît la sécurité en prenant $S' > 1$ alors il faut soit diminuer la pression p d'un facteur $\sqrt{S'}$ pour conserver l'épaisseur e, soit augmenter l'épaisseur d'un facteur S' pour conserver la pression p.



En effet, à épaisseur constante $e = e_1$=18 mm, avec S'=1, p_1 =92 bars tandis qu'avec S'=2, $p = \frac{p_1}{\sqrt{S'}}$=65 bars.
Réciproquement à pression constante $p = p_1$=92 bars, avec S'=1, e_1=18 mm tandis qu'avec S'=2, $e = e_1 S'$=36 mm.

$p < p_c$	$\frac{e}{p}$=0,2 mm.bar^{-1}	p (bar)	30	50	100	150
$p < p_c$ $(S' = 1)$	$\frac{e}{p}$=0,0022 mm.bar^{-2}	e mm (S'=1)	6	10	21,8	48,9
$p < p_c$ $(S' = 2)$	$\frac{e}{p}$=0,0043 mm.bar^{-2}	e mm (S'=2)	6	10,9	43,5	97,8

5°) Bouteille acier, e=6 mm, r=10 cm, $< 2a_c$=18 mm, S=2, $p_S = \frac{\sigma_e e}{Sr}$=300 bars pour une pression de remplissage p_r de 200 bars, soit un coefficient de sécurité effectif $S_{eff} = \frac{\sigma e}{p_r r}$=3.