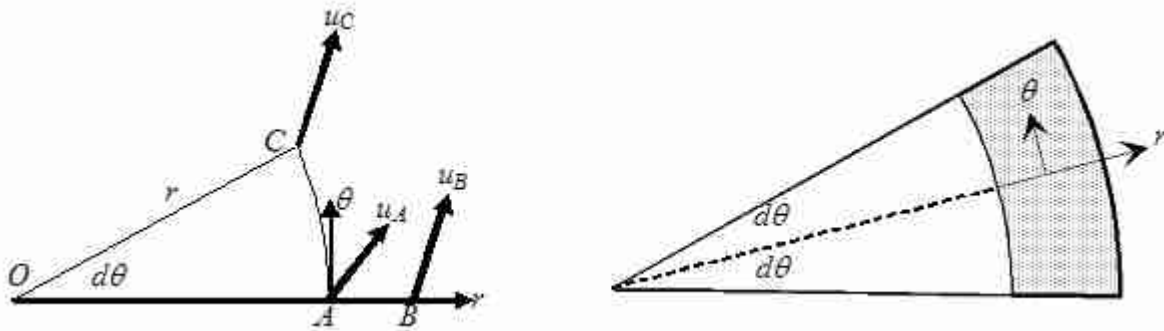


Mécanique du solide et des matériaux
Travaux dirigés 126° Promotion

TD N°1 du Lundi 22 Septembre 2008 à 13h

Contraintes et déformations en polaire



1°) Considérons le problème plan en coordonnées polaires r, θ . En raisonnant sur les éléments de longueur représentés sur la figure, montrer que le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}(r, \theta)$ s'écrit :

$$\bar{\varepsilon}(r, \theta) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right\} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \end{vmatrix}$$

Donner l'interprétation géométrique des termes en $\frac{u}{r}$ dans $\varepsilon_{r\theta}$ et $\varepsilon_{\theta\theta}$.

Indication : Utiliser le principe de superposition et additionner les résultats obtenus dans le cas d'un déplacement radial u_r seul, puis dans le cas d'un déplacement circonférentiel u_θ seul.

2°) Montrer que l'équilibre mécanique de l'élément grisé, en projection sur r et θ en l'absence de forces de volume et en statique, se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \end{cases}$$

3°) Effectuer les simplifications dans le cas d'une géométrie de structure et de chargement à symétrie cylindrique et montrer que, pour un matériau élastique linéaire répondant à la loi de comportement $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ la solution du problème se réduit à la résolution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

dans laquelle u désigne la seule composante non nulle du déplacement \vec{u} que l'on précisera. Justifiez le changement de variable $f = \frac{u}{r}$ et donner la solution générale de cette équation ainsi que la forme générale des tenseurs des déformations et des contraintes associés.

TD N°2 du Lundi 13 Octobre 2008 à 13h

Le ballon de Baudruche

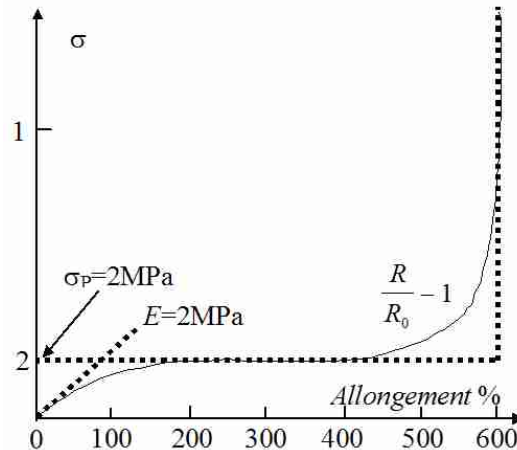
Les caoutchoucs naturels et synthétiques présentent des allongements relatifs à rupture de 600 à 800%. Cette extensibilité est due à la présence de chaînes moléculaires longues et flexibles. La réponse élastique d'un caoutchouc est fortement non linéaire, se composant de trois zones :

- Une première zone à faible déformation ($< 100\%$) dans laquelle le module d'Young (de l'ordre de 1 à 10 MPa à très faible déformation ($< 10\%$) décroît progressivement. Les macromolécules initialement enchevêtrées en pelote sont liées entre elles par des ponts *Van der Waals*. Ces derniers offrent une résistance au démêlage des chaînes ce qui explique la forte pente à l'origine. Ce nombre de ponts diminue au fur et à mesure de la séparation des chaînes, faisant tendre le module d'Young vers une

valeur très faible.

- Une seconde zone s'étendant en déformation de 100% à 600% et dans laquelle le module d'Young est très faible, la déformation se poursuivant quasiment à contrainte constante. Les pelotes s'étirent progressivement et la faible résistance à cet étirement provient de l'agitation thermique qui tend à réemmêler les chaînes.

- La dernière zone, peu étendue à très haute déformation, voit le module tangent croître brutalement jusqu'au GPa. Ce sont les liaisons covalentes du squelette carboné de la plupart des chaînes qui sont maintenant étirées d'où la remontée brutale du module et la rupture (fragile) intervient sans accroissement notable de déformation.



Un ballon de baudruche sphérique de rayon initial $R_0=20$ mm et d'épaisseur de membrane $e_0=0,2$ mm présente une réponse élastique non linéaire que l'on schématisera par la réponse en pointillé de la figure ci dessus avec un module d'Young $E=2$ MPa, une contrainte plateau $\sigma_P=2$ MPa à partir d'un allongement relatif de 100%, un coefficient de Poisson $\eta=0,5$ et un allongement à rupture de 600%. Il est soumis à une surpression p croissante. On cherche à établir la relation $p = f(R)$.

1°) Etablir la relation liant la surpression p à la contrainte de traction σ régnant dans la membrane du ballon. On justifiera les approximations faites.

2°) Etablir la relation entre la déformation vraie ε de la membrane et son rayon de gonflage R .

3°) Etablir la relation $p = f(R)$ dans la partie élastique de la courbe de réponse du caoutchouc.

4°) Montrer que cette courbe présente un maximum pour un rayon R_C associé à une surpression p_C dont on donnera les expressions et les valeurs numériques.

5°) Déterminer les valeurs limites p_P et R_P au delà des quelles la relation $p = f(R)$ cesse d'être valable et établir la nouvelle relation valable pour $p > p_P$.

6°) Déterminer la pression p_R et le rayon R_R de rupture du ballon.

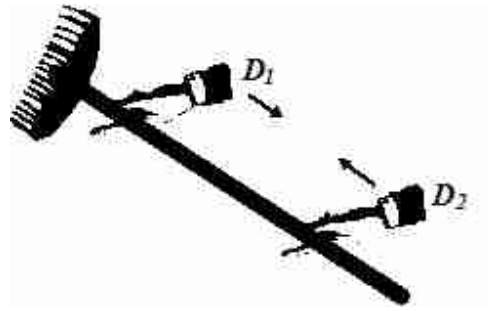
7°) Tracer schématiquement la réponse $p = f(R)$ et en déduire le comportement de deux ballons gonflés respectivement aux rayons R_1 et R_2 lorsqu'on les met en communication.

TD N°3 du Mardi 21 Octobre 2008 à 8h30

Le stick-slip

En présence de frottement sec, le mouvement relatif des deux parties frottantes s'effectue généralement de manière saccadée, présentant des phases d'immobilisation suivie de manière plus ou moins périodique de glissement. Illustrons ce comportement avec un premier exemple particulièrement simple : celui du balai.

Comme décrit sur la figure, maintenons horizontal un balai sur un doigt de chaque main. Pour que le balai soit en équilibre, il est nécessaire que son centre de gravité G , proche de la brosse, soit situé dans l'intervalle entre les deux doigts D_1 et D_2 , le doigt D_1 étant situé proche de la brosse. Rapprochons alors lentement les deux mains l'une vers l'autre. On constate que le manche du balai glisse alternativement sur un doigt puis sur l'autre de sorte que les deux doigts convergent naturellement vers un point de rencontre particulier.



Notons μ_S le coefficient de frottement statique doigt-manche et $\mu_D < \mu_S$ le coefficient de frottement dynamique lorsque le doigt glisse sur le manche, P le poids du balai (brosse + manche), R_1 la réaction normale du doigt D_1 , R_2 celle du doigt D_2 .

1°) Dans le repère du centre de gravité G du balai, x_1 désignant la distance D_1G et x_2 la distance GD_2 , établir les expressions des réactions d'appui R_1 et R_2 .

2°) Partant de l'état initial $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$ avec $x_2^0 > x_1^0$ établir les expressions des résistances limites au frottement T_1 et T_2 et déterminer qui du doigt D_1 ou du doigt D_2 se mettra à glisser.

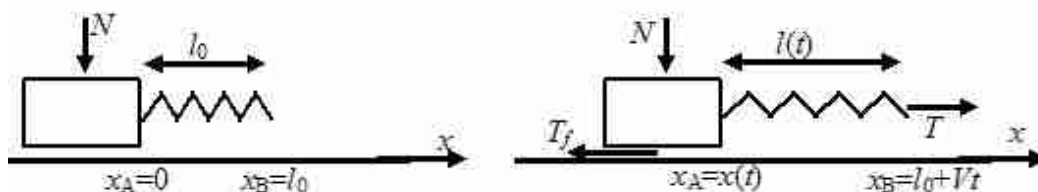
3°) Que devient la résistance au glissement T_i du doigt qui glisse.

4°) En étudiant l'évolution de T_i au cours du mouvement du doigt, déterminer la condition d'arrêt du glissement et en déduire une expression simple du rapport $\frac{\mu_D}{\mu_S}$.

5°) Décrire l'évolution ultérieure du système, en déduire les positions successives des points d'arrêt et le point de convergence.

Le stick-slip se manifeste par exemple lors du mouvement de glissement relatif des lèvres d'une faille origine des tremblements de terre. Du fait de la rugosité des lèvres comprimée l'une contre l'autre, fracture fermée, l'engrènement des aspérités interdit tout mouvement relatif de forte amplitude pendant la phase d'accumulation d'énergie élastique qui se traduit par une déformation faible (imperceptible) et lente des aspérités, c'est la phase stick. Lorsque la quantité d'énergie est suffisante, les cisaillements provoquent le glissement relatif brutal des aspérités l'une sur l'autre, relaxation quasi périodique élastique des surfaces peu rugueuses, voire leur rupture se traduisant par des fluctuations chaotiques de la force de friction, le cisaillement provoquant un déplacement brutal de forte amplitude par relaxation de l'énergie accumulée c'est la secousse sismique, phase slip et le cycle recommence.

Le modèle le plus simple conduisant à des oscillations de relaxation de stick-slip est celui de la masse m de poids $N = mg$ en glissement horizontal frottant caractérisé par les coefficients statique μ_S et dynamique $\mu_D < \mu_S$ couplée à un ressort de raideur k déplacé à vitesse constante V de manière à introduire les deux ingrédients fondamentaux, les forces de friction et le rappel élastique. Au temps initial $t = 0$, la position de la masse immobile est repérée par $x_A = 0$ et celle de l'extrémité du ressort supposé détendu de longueur au repos l_0 par $x_B = l_0$ de sorte que la force de résistance au frottement et la tension T du ressort soient nulles. A partir de cet instant, l'extrémité B du ressort est mise en mouvement à vitesse uniforme V .



1°) Déterminer la limite de résistance T_{fS} au frottement statique de la masse m . Déterminer l'évolution de la traction T du ressort pour un temps $t \geq 0$. En déduire la valeur du temps t_0 à partir duquel la masse va commencer à glisser ainsi que la valeur T_{max} de la tension du ressort à cet instant.

2°) Pour $t > t_0$ la masse glissant est repérée par son abscisse $x_A = x(t)$. Déterminer la valeur de la résistance au glissement T_{fD} et établir l'équation différentielle et les conditions initiales régissant son

mouvement. Simplifier cette équation en introduisant la valeur du temps t_0 déterminé précédemment et celle d'une pulsation caractéristique ω dont on donnera la signification physique.

3°) Établir la solution de cette équation et déterminer le temps t_1 au delà duquel elle cesse d'être valide ainsi que la position x_1 de la masse m et la valeur T_{min} de la tension du ressort à cet instant.

4°) Donner l'expression du temps t_2 au delà duquel la masse se remet à glisser. Schématiser sur un graphe x, t l'évolution temporelle de la position de la masse et identifier sur ce schéma les périodes du cycle, de la phase *stick* et de la phase *slip*.

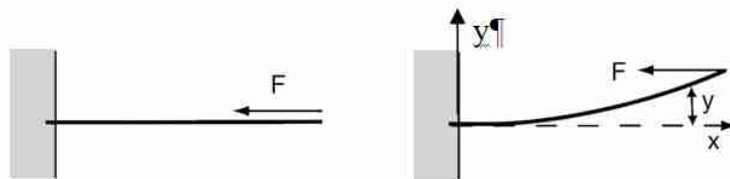
5°) Établir l'expression du déplacement δx de la masse au cours de chacun de ses cycles. En général, la période de *slip* est **beaucoup plus courte** que la période de *stick* (cf tremblements de terre). Dédire de cette constatation la valeur approchée de δx et l'exprimer en fonction de la différence $T_{max} - T_{min}$.

TD N°4 du Vendredi 31 Octobre 2008 à 8h30

Tiges et Clous

Les objets minces sont d'une grande utilité (de la canette au fuselage d'avion en passant par les poutres de la tour Eiffel) tant qu'ils conservent leur forme. Malheureusement, au delà d'une compression seuil, ils *flambent* : ils se déforment fortement, transformant l'énergie de compression en énergie de flexion.

Une tige peut être localement courbée sur un rayon R au prix d'un moment $M = \frac{EI}{R}$, où E est son module de Young, et I le moment d'inertie de la section. (pour une tige pleine à section circulaire de rayon r , $I = \frac{\pi}{4}r^4$).



1°) Donner, à un coefficient multiplicatif k près, l'ordre de grandeur de la force horizontale F_C capable de défléchir une tige de longueur L dans cette configuration (encastrée - libre).

2°) En établissant un bilan mécanique local démontrer l'équation d'équilibre approchée de la tige :

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} + F \frac{dy}{dx} = 0$$

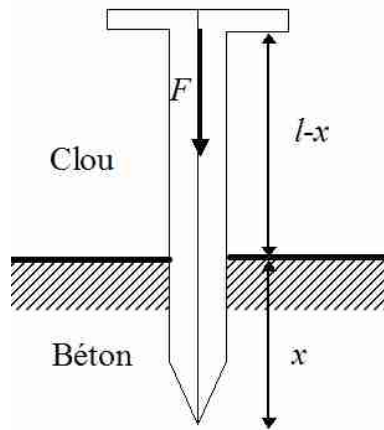
Quelles sont les conditions aux limites imposées ? Montrer alors l'existence d'un seuil de flambage F_C et donner sa valeur. Comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.

3°) Donner l'ordre de grandeur du seuil de flambage d'une tige verticale pleine à section circulaire (longueur L , masse volumique ρ , diamètre ϕ) sous son propre poids. Exprimer la loi d'échelle donnant la hauteur maximale d'un arbre en fonction du diamètre de son tronc (C'est le problème qui a conduit Leonhard Euler (1707-1783) à écrire les premières équations d'équilibre des tiges). Pourquoi un grand arbre semble-t-il moins élancé qu'un arbrisseau ?

4°) D'arcy Thompson (1860-1948) remarque dans son livre *On growth and form* que, ramenés à la même échelle, le squelette d'un homme est beaucoup plus massif que celui d'une souris, alors que celui d'une baleine est très similaire à celui d'une petite tortue marine. Pourquoi ? (le squelette d'une souris pèse 8% de son poids contre 18% dans le cas d'un homme).

"y'en a qui s'plient, y'en a qui s'coudent" Francis Blanche, canulars téléphoniques.

Il est bien connu qu'enfoncer un clou dans un matériau dur est une opération difficile qui se traduit souvent par le fait que le clou plie au lieu de continuer à s'enfoncer. On cherche à planter un clou de longueur l , de rayon R en acier de module d'Young $E_a=200$ GPa et de résistance limite à la traction $\sigma_a=1,2$ GPa dans un béton armé de module d'Young $E_b=45$ GPa et de résistance limite à la compression $\sigma_b=400$ MPa. On notera $\mu=0,5$ le coefficient de frottement acier-béton.



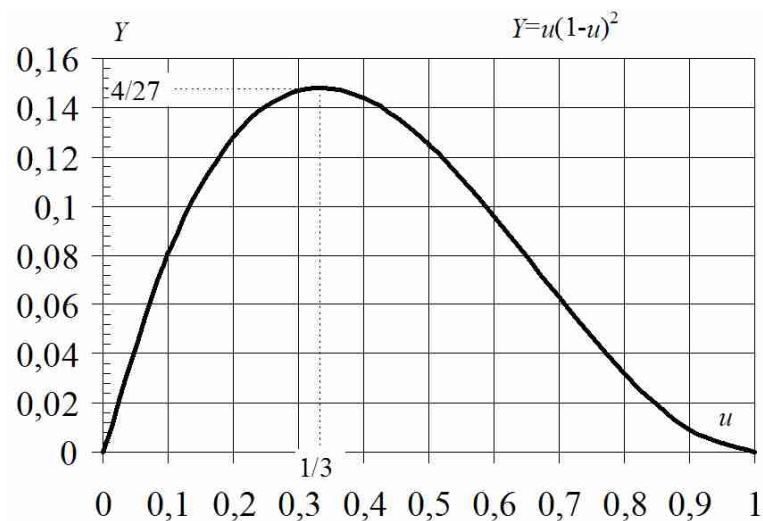
5°) En admettant que le pouvoir perforant du clou soit suffisant pour faire un trou dans le béton, établir l'expression reliant la force F nécessaire pour enfoncer le clou à la profondeur de pénétration x .

6°) En vous appuyant sur les résultats précédents démontrer que la condition de **non flambement** s'écrit :

$$\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 < \frac{k E_a}{8 \sigma_b} \left(\frac{R}{l}\right)^3$$

En déduire le rapport $\frac{R}{l}$ minimum pour que le clou béton ne se plie pas lors de son enfoncement.

7°) Un clou de diamètre 2 mm et de longueur 16 mm pliera-t-il avant enfoncement complet ? Si non, à partir de quelle valeur d'enfoncement interviendra la pliure ? On prendra $k=4$ pour l'application numérique.

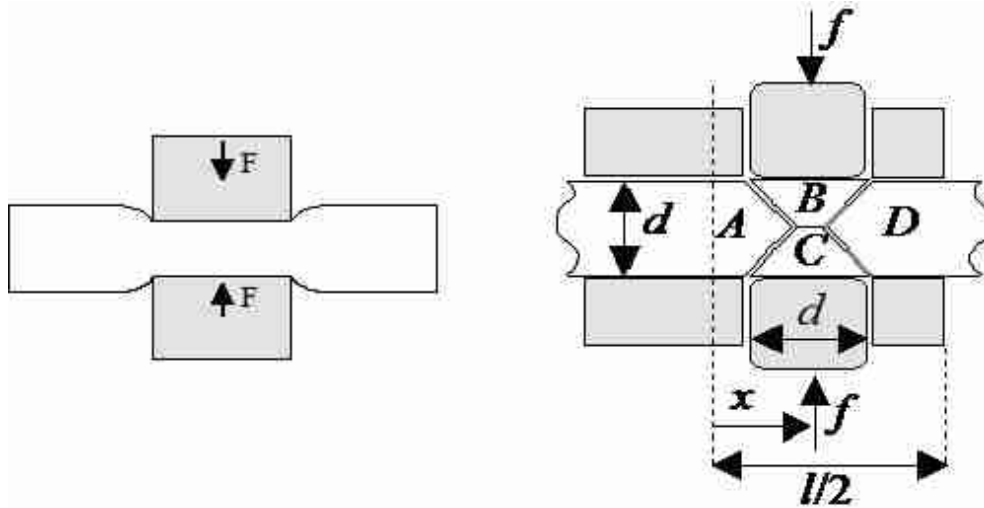


TD N°5 du Vendredi 7 Novembre 2008 à 8h30

Forgeage et laminage

Le travail des métaux et alliages par corroyage (déformation plastique) pour leur donner une forme déterminée repose sur leur grande plasticité. Ils peuvent subir de forts pourcentages de déformation sans se rompre, tout particulièrement en compression. Mais les pressions appliquées pour leur mise en forme peuvent être très supérieures à la limite d'écoulement plastique en compression σ_e du matériau. Une opération de forgeage classique (blooming) consiste à écraser un lopin métallique entre les deux plateaux d'une presse selon le schéma ci-contre.

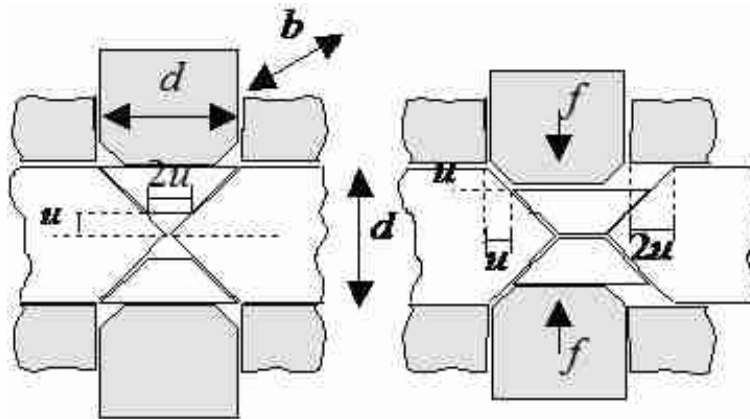
Pour estimer la pression de formage à l'abscisse x isolons par la pensée un élément des plateaux de formage centré sur x auquel nous appliquons une force f . Lorsque ces parties mobiles se déplacent,



on peut imaginer un découpage du lopin en quatre parties A, B, C, D combinées de sorte que sa déformation plastique soit possible sous l'action d'un déplacement virtuel u de chacun des éléments de plateaux.

1°) Pour quelle raison doit on choisir la largeur de l'élément de plateau mobile juste égale à l'épaisseur d du lopin ?

Au cours de l'écrasement sous l'action de la force f il y a glissement relatif des parties B, C, D conformément au schéma ci-dessous.



2°) En notant b la largeur du lopin écrasé et k la limite d'écoulement plastique du métal au cisaillement démontrer par un simple bilan d'énergie que la force f est donnée par $f = 2bdk$ et que la pression de formage à l'abscisse x le long du lopin s'écrit $p(x) = \sigma_e$. Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

3°) En pratique il faut tenir compte du frottement entre les plateaux de la presse et le lopin au cours de son écrasement plastique. En notant μ le coefficient de frottement entre les plateaux et le lopin réécrire le bilan d'énergie et démontrer que la pression de formage varie avec l'abscisse x comme :

$$p(x) = \sigma_e \left(1 + \mu \frac{1 - 2x}{d} \right)$$

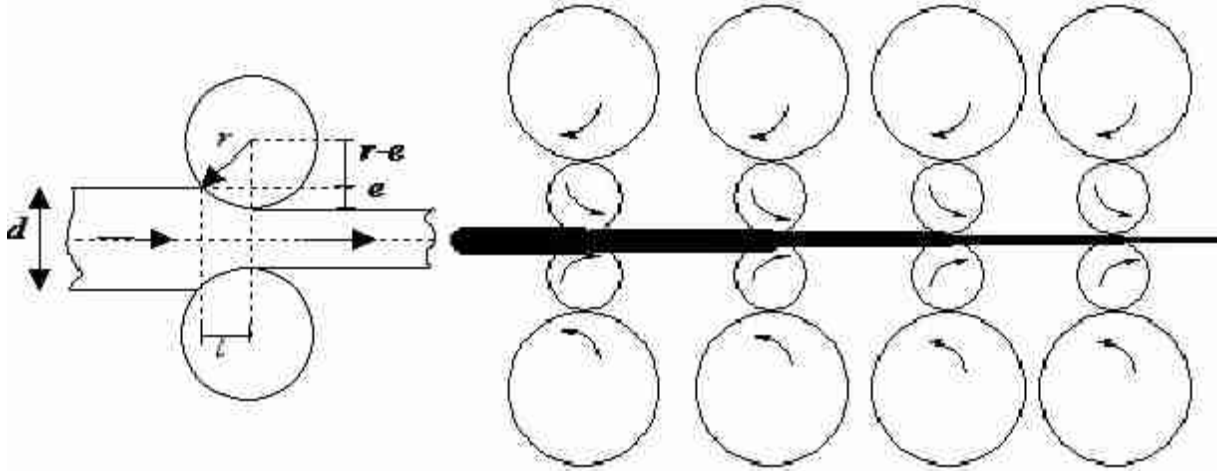
Faire un schéma de l'évolution de cette pression en fonction de x et donner les expressions de la pression maximale p_m et de la pression moyenne $\langle p \rangle$.

Indication : Si la partie A reste fixe, les parties B, C, D se déplacent horizontalement au cours de l'écrasement.

4°) Justifiez physiquement que le coefficient de frottement $\mu \approx \frac{1}{2}$ et calculez le rapport $\frac{p_m}{\sigma_e}$ pour un rapport $\frac{l}{d} = 10$. Quelle conséquence aurait ce résultat sur l'outillage de forgeage ? Sur quel paramètre agit-on en pratique pour réduire cette pression et quel procédé en découle ?

Indication : pensez au travail du forgeron.

Une autre façon de réduire cette pression est de modifier la géométrie du procédé et le laminage en est un bon exemple.



5°) Montrer que le rapport $\frac{l}{d}$ s'écrit :

$$\frac{l}{d} = \sqrt{\frac{2r}{d}} \sqrt{\frac{e}{d}}$$

sous réserve d'une condition géométrique que l'on précisera. En déduire les expressions des pressions maximale p_m et moyenne $\langle p \rangle$ de laminage.

Les rouleaux d'aluminium ménager sont fabriqués par laminage à froid. L'épaisseur finale de la feuille est de $15 \mu\text{m}$ sur une largeur de 25 cm. La limite d'écoulement plastique de l'aluminium est $\sigma_e = 40 \text{ MPa}$. L'épaisseur de la feuille étant de $30 \mu\text{m}$ à l'entrée des cylindres d'acier (module d'Young $E = 200 \text{ GPa}$, diamètre 6 mm) constituant la dernière cage du train de laminoir calculer la longueur l , le rapport $\frac{p_m}{\sigma_e}$, la charge linéique moyenne q (exprimée en kNm^{-1}) supportée par chaque cylindre et la force totale de pressage F (exprimée en kN).

6°) La flèche δ prise par un cylindre de rayon r et de largeur b soumis à une charge linéique q est donnée dans l'hypothèse de la résistance des matériaux par :

$$\delta = \frac{5}{96\pi} \left(\frac{b}{r}\right)^4 \frac{q}{E}$$

calculer la flèche δ prise par le cylindre. Quelles réflexions vous inspire ce résultat étonnant ?

7°) *Schéma d'un train de laminoir*

1. Un train de laminage se compose d'un ensemble de cages successives.
2. Une cage est constituée d'une paire de cylindres de travail de petit diamètre
3. Les cylindres de travail sont lubrifiés et présentent un état de surface *poli miroir*.
4. Les cylindres de travail sont encadrés par des cylindres plus gros dits de soutien.

Attribuer à chaque proposition le facteur correspondant δ , μ , $\sqrt{\frac{2r}{d}}$, $\sqrt{\frac{e}{d}}$ en justifiant votre choix.

TD N°6 du Lundi 24 Novembre 2008 à 13h

Réservoir sous pression

Un réservoir sous pression est assimilé à un cylindre à paroi mince de rayon intérieur r et d'épaisseur e . Il est constitué d'un matériau de limite élastique σ_e et de ténacité K_c comportant des microfissures de taille $\leq 2a$. La contrainte maximale de service σ est limitée à $\frac{\sigma_M}{S}$ avec σ_M contrainte maximale admissible par le matériau et S coefficient de sécurité ($S > 1$, généralement de l'ordre de 1,5-2). Le

réservoir est équipé de jauges de déformation.

1°) Déterminer et représenter l'allure de l'évolution de la contrainte maximale σ_M admissible par le matériau avec la dimension caractéristique a des microfissures. Montrer qu'il existe une taille caractéristique de défaut critique $a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_c}{\sigma_e} \right)^2$ dont on précisera la signification physique en terme de sûreté des réservoirs sous pression. Que se passe-t-il en cas de forte pressurisation selon que les défauts préexistants ont une dimension caractéristique plus petite ou plus grande que a_c ?

Indication : Le facteur d'intensité de contrainte K associé à une fissure de longueur $2a$ dans un champ de contrainte d'ouverture σ est $K = \sigma \sqrt{\pi a}$.

2°) Déterminer la dimension de défaut critique $2a_c$ pour les matériaux :

- Acier allié pour réservoir sous pression : $\sigma_e=1000$ Mpa et $K_c=170$ Mpa.m^{1/2}
- Alliage d'aluminium : $\sigma_e=400$ Mpa et $K_c=25$ Mpa.m^{1/2}

Si la plus petite fissure détectable a une longueur de 2 à 3 mm lequel de ces deux métaux est le plus sûr pour l'application envisagée et pourquoi ?

3°) Compte tenu des dégâts causés par la rupture d'un réservoir sous pression, on impose très souvent une condition supplémentaire en concevant le réservoir de sorte qu'il se mette à fuir avant de rompre. Pourquoi une telle précaution puisque le réservoir à été initialement calculé de sorte qu'il supporte sans rompre la pression de service ? Justifiez la traduction de cette condition sous la forme $2a_{cr} = S'e$ avec S' coefficient de sécurité ($S' > 1$, généralement de l'ordre de 1,5-2) où $2a_{cr}$ est la taille d'un défaut dont on donnera une interprétation physique. Quel est le prix à payer pour ce surcroît de sécurité ?

4°) Déterminer et représenter l'allure de l'évolution de l'épaisseur e d'un réservoir en fonction de la pression p . Pour un réservoir en acier de rayon $r=1$ m, déterminer puis calculer l'épaisseur e pour les pressions de service $p_S = 50, 100, 150$ et 200 bars lorsque l'on s'impose des coefficients de sécurité $S = S' = 2$.

5°) Les bouteilles acier de gaz sous pression (oxygène, ...) ont un diamètre de 20 cm, une épaisseur de 6 mm et une pression de remplissage à 200 bars. En gardant le même coefficient de sécurité $S=2$, quelle est la pression de service maximale admissible. Comparer à la pression de remplissage.