Mécanique du Solide et des Matériaux - Promo 126 - Préceptorat 1

Silo à grains

Constatations expérimentales

Un silo à grains constitué d'un tube cylindrique en plexiglas de diamètre intérieur ϕ=60 mm fixé sur un support est fermé à sa partie inférieure par un bouchon mobile reposant sur une balance à ressort.

Le silo est progressivement rempli de grains de riz de masse volumique apparente ρ=0,7 g.cm^3. 550 g de riz occupent un volume de 800 ml. Il est ainsi facilement gradué directement en masse de riz.

Le relevé conjoint de l'indication de la balance et de la masse réelle de riz ajoutée conduit à la courbe suivante :

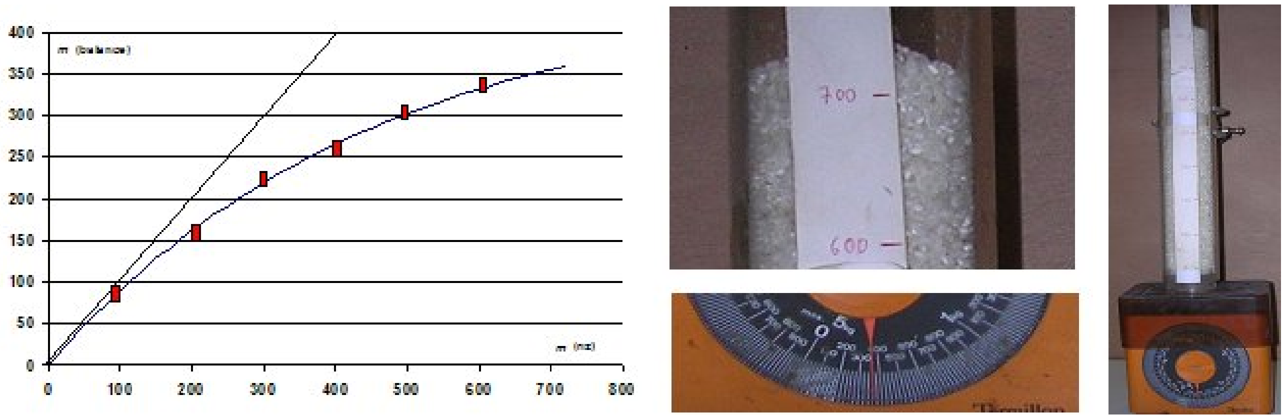

Fig. 1 – masse pesée en fonction de la masse de riz ajoutée

Milieux granulaires : dilatance et redirection des efforts

Lorsqu'un matériau granulaire *fortement compacté* est placé dans une enveloppe flexible, son volume augmente invariablement lorsque cette enveloppe est déformée. Si cette enveloppe est inextensible mais déformable, aucune déformation n'est possible jusqu'à ce que les forces appliquées brisent l'enveloppe ou fractionnent le matériau granulaire. C'est le principe de fonctionnement des matelas *coquille* utilisé par les pompiers pour immobiliser un blessé lors de son transport. Ce dernier est placé sur une enveloppe contenant des microbilles et de l'air. L'enveloppe se déforme pour épouser le corps du blessé, puis on effectue le vide dans l'enveloppe, ce qui compacifie le granulaire dans la forme prise et interdit sa déformation ultérieure, assurant une immobilisation parfaite lors du transport.

Cette observation décrit l'un des grands principes de la physique des matériaux granulaires qui reflète sans doute une de leurs caractéristiques essentielles. Elle constitue ce qui est maintenant connu sous le nom de *principe de dilalance* de Reynolds. Il est important de rappeler ici que le principe de dilatance doit être pris dans son intégralité. En particulier, la précision que le matériau granulaire doit être initialement *fortement compacté* est absolument essentielle.

Une autre manifestation de l'effet de dilatance des granulaires s'observe aisément sur les plages. Lors d'une promenade sur une plage de sable mouillé, le sable s'assèche rapidement autour de l'empreinte des pieds. Cela peut être expliqué à partir du principe de dilatance qui indique bien que la déformation imposée au sable par le pied doit s'accompagner d'une augmentation de volume de la masse granulaire qui aspire l'eau résidant en surface, donnant ainsi l'impression que le sable s'assèche sur le pourtour de l'empreinte.

Les limites du principe de dilatance tel qu'il a été exposé par Reynolds peuvent être mises en évidence sur le modèle simple de la déformation élémentaire d'un losange constitué de quatre disques identiques de rayon R, schématisant un composant d'un matériau granulaire simplifié a l'extrême. Le modèle impose qu'au cours de toute déformation les quatre disques restent en contact.

1°) Sous l'action des sollicitations indiquées par les flèches, déformons le losange élémentaire qui relie les centres des quatre disques en contact établir l'expression de la surface totale S occupée par cet objet en fonction du rayon R des disques et de la diagonales l_h du losange dont on définira les limites de variation. Représenter l'allure de la fonction $\frac{S-3\pi R^2}{4R^2}$ en fonction du rapport $\frac{l_h}{2R}$.

2°) On peut tenter de calculer les paramètres de déformation effectifs de ce matériau en suivant la méthodologie utilisée en mécanique des solides. Comme nous n'avons aucune idée de la résistance élastique (anisotrope) de l'objet considéré, il est hors de question d'essayer d'introduire les constantes élastiques effectives du système. Cependant, on peut définir, dans un premier temps, l'analogue du coefficient de Poisson η défini habituellement pour un matériau homogène et isotrope. Pour une déformation telle que celle qui est représentée sur la figure 1 où une contraction relative du bras vertical $\varepsilon_v = \frac{dl_v}{l_v}$ induit une dilatation relative du bras horizontal $\varepsilon_h = \frac{dl_h}{l_h}$ établir l'expression du coeficient de Poisson η en fonction du rapport $\frac{l_h}{2R}$. Représenter l'allure de la fonction η en fonction du rapport $\frac{l_h}{2R}$.

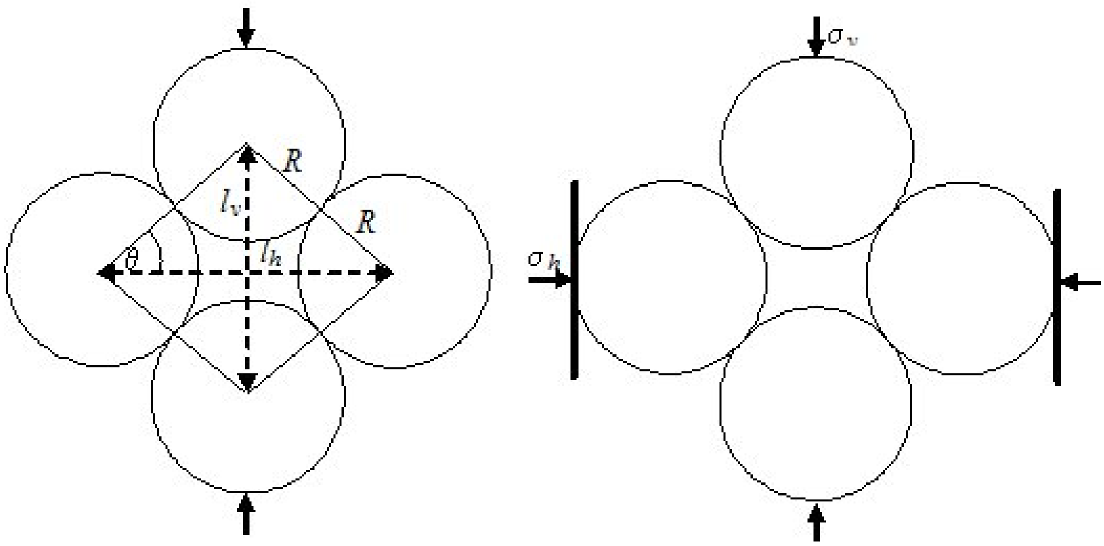

FIG. 2 – Modèle simple de détermination du coefficient de redirection des efforts

3°) Déterminer la valeur du coefficient de Poisson η en deça de laquelle le principe de dilatance de Reynolds cesse de s'appliquer.

4°) Le modèle élémentaire examiné ci-dessus ne peut exister en l'absence de parois verticales qui bloquent la fuite des billes latérales vers l'extérieur. L'existence de ces parois que l'on doit considérer comme déformables impose de considérer leur module d'Young E afin de déterminer la résistance qu'elles vont opposer au déplacement latéral des disques.

En admettant que ces parois verticales subissent une déformation homogène uniaxiale et horizontale, caractérisée par $\varepsilon_h = \frac{\sigma_h}{E}$, où σ_h est la contrainte exercée par les disques, supposés indéformables, sur les parois. La stabilité des disques étant ainsi assurée et le frottement sec entre les billes étant négligé (disques parfaitement durs et lisses), établir à l'aide d'un bilan de travail l'expression du coefficient de *redirection des efforts* vers la *paroi* $K = \frac{\sigma_h}{\sigma_v}$ de la contrainte σ_v exercée verticalement sur le matériau en fonction du coefficient de Poisson η. Donner la valeur de K dans le cas d'un empilement triangulaire compact.

Récipient cylindrique : probléme du silo et modèle de Janssen

Observant la propension marquée des milieux granulaires à rediriger les contraintes verticales vers les parois latérales, dans l'esprit du modèle simple évoqué ci-dessus, Janssen a proposé le modèle suivant de silo dans lequel le milieu granulaire constitué de grains non cohésifs de diamètre moyen ϕ est considéré, du point de vue du traitement mathématique, comme un milieu continu.

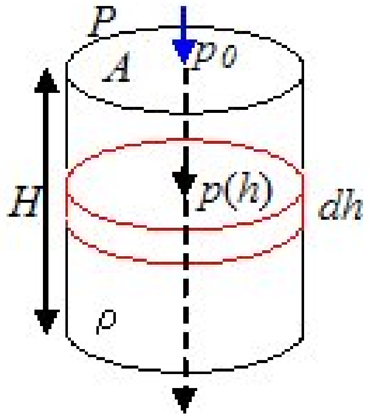

FIG. 3 – Silo cylindrique d'aire de section droite A et de périmètre P rempli d'un milieu granulaire (masse volumique apparente ρ, coefficient de frottement à la paroi μ) supportant une pression extérieure p_0.

5°) En écrivant l'équilibre d'une tranche d'épaisseur dh, établir l'équation différentielle :

$$\frac{dp}{dh} + \chi p = \rho g$$

vérifiée par la pression $p(h)$, équation dans laquelle χ , paramètre de compaction, est une fonction de K, μ, P, A que l'on précisera. Quelle est la dimension de χ ?

6°) quelle condition doit vérifier l'épaisseur dh de la tranche pour que le modèle *type milieu continu* soit applicable ?

7°) Donner la solution de l'équation différentielle dans le cas p_0=0. Comparer l'évolution de la pression $p(h)$ à celle obtenue si le silo était rempli d'un liquide de même masse volumique ρ que le milieu granulaire. Justifiez l'existence au sein du granulaire d'une hauteur h_S et d'une pression de saturation p_S dont on donnera les expressions.

8°) Etablir la relation liant la masse de granulaire m_G remplissant le silo sur une hauteur h et l'indication m_B fournie par la balance en fonction de h et de hS.

9°) La balance indiquant une masse de 360 g lorsque le silo de diamètre intérieur ϕ=6 cm contient 720 g de riz, calculer la hauteur de remplissage H et la hauteur de saturation h_S du silo (sachant que $\frac{1-\exp(-1{,}6)}{1{,}6} \approx \frac{1}{2}$) ainsi que la masse de saturation m_S. Le coefficient de frottement des grains à la paroi du silo valant μ=0,2, déterminer la valeur du coefficient de redirection K du milieu granulaire.

10°) Quel serait le résultat d'une expérience identique si on remplaçait la balance à ressort par une balance électronique à plateau fixe (dont la mesure est liée au courant de contre réaction de l'électro-aimant supportant le plateau).