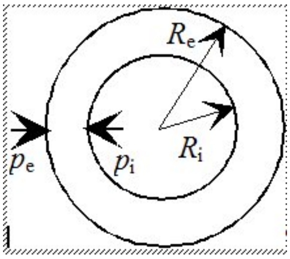
Mécanique du Solide et des Matériaux - Promo 126 - Préceptorat 2

Déformation élasto-plastique d'un tube sous pression

Un cylindre creux à paroi épaisse de longueur L, de rayons intérieur R_i et extérieur R_e est soumis à une pression intérieure p_i et une pression extérieure p_e. Le matériau constitutif est caractérisé par ses modules élastiques de Lamé λ et μ. Au dela du domaine élastique limité par son seuil d'écoulement en traction R^P=1,7 GPa il présente un comportement plastique parfait.



Régime élastique

1°) Quelle condition doit vérifier la longueur L pour assimiler le problème à un problème de déformation plane ?

2°) En polaire (r, θ, z) le tenseur des déformations planes et l'équation de l'équilibre statique $\mathbf{Div}\overline{\overline{\sigma}} = 0$ sont donnés par :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2}(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}) \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}) & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \\ \frac{1}{r}(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + r\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2\sigma_{r\theta}) \end{matrix}$$

Démontrer, en justifiant les simplifications effectuées, que l'équation de l'équilibre se reduit à l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}$$

3°) Justifier physiquement le changement de variable $u = fr$ et montrer que la solution générale s'écrit :

$$u = Ar + \frac{B}{r}$$

4°) Préciser les conditions aux limites et donner l'expression du tenseur des contraintes régnant dans le tube.

5°) Tracer l'évolution des quantités $\frac{\sigma_{rr}}{p}$ et $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{p}$ en fonction de $\frac{r}{R_e}$ pour un cylindre creux de rayons $R_i = \frac{1}{2}R_e$ dans le cas d'une pression intérieure seule ($p = p_i, p_e = 0$) et dans le cas d'une pression extérieure seule ($p_i = 0, p = p_e$).

Régime plastique

On considère maintenant un cylindre creux soumis à la seule pression extérieure p_e.

6°) Déterminer le lieu des points soumis au cisaillement maximal $\tau(p_e)$ dont on établira l'expression. En déduire le lieu de début de plastification et déterminer l'expression et la valeur de la pression p^P associée lorsque $R_i = \frac{1}{2}R_e$.

Pour une pression supérieure, le cylindre est partiellement plastifié et on cherche à déterminer le rayon R de la frontière entre la zone plastique et la zone élastique.

7°) Etude de la *zone plastique* : Montrer que, dans cette zone, l'équation d'équilibre se réduit à :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{R^P}{r}$$

en déduire l'expression du tenseur des contraintes dans la zone plastifiée.

8°) Etude de la *zone élastique* : Préciser les nouvelles conditions aux limites et en déduire l'expression du tenseur des contraintes dans la zone élastique.

9°) *Frontière entre la zone élastique et la zone plastique* : En écrivant la continuité de l'état de contrainte à la frontière, Montrer que le rayon R de la frontière et la pression **maximale** admissible p^R vérifient :

$$\frac{1}{2}(1-(\frac{R}{R_e})^2)+\ln(\frac{R}{R_i})=\frac{p_e}{R^P} \qquad P^R=R^P\ln(\frac{R_e}{R_i})$$

10°) tracer l'évolution du rayon R en fonction de la pression appliquée p_e pour un cylinde creux de rayon $R_i=\frac{1}{2}R_e$. On tracera $\frac{R}{R_e}$ en fonction de $\frac{p_e}{R^P}$.

11°) Tracer l'évolution des contraintes $\frac{\sigma_{rr}}{R^P}, \frac{\sigma_{\theta\theta}}{R^P}, \frac{\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}}{R^P}$ en fonction de $\frac{r}{R_e}$ dans le cas où $\frac{R}{R_e}=\frac{3}{4}$ et calculer la valeur de la pression $p_e(R)$ correspondante.

12°) Lignes de glissement : Démontrer que les lignes de glissement dans la zone plastique ont pour équation :

$$r=C\exp(\pm\theta)$$

En tracer une représentation schématique.