

Mécanique du Solide et des Matériaux - Promo 126 - Préceptorat 4
Fracturation des grains et pastilles fragiles

Introduction

Constatations expérimentales

Lorsque un grain (dimension $d=3$) ou une pastille (dimension $d=2$) en matériau fragile sont soumis à une compression diamétrale, l'expérience montre que la force de rupture en compression F_R est une fonction croissante du diamètre ϕ du grain ou de la pastille bien représentée par la loi :

$$F_R = K_0 \phi^\alpha \quad \alpha \approx d - \frac{3}{2}$$

Elle met également en évidence les modes de rupture suivants :

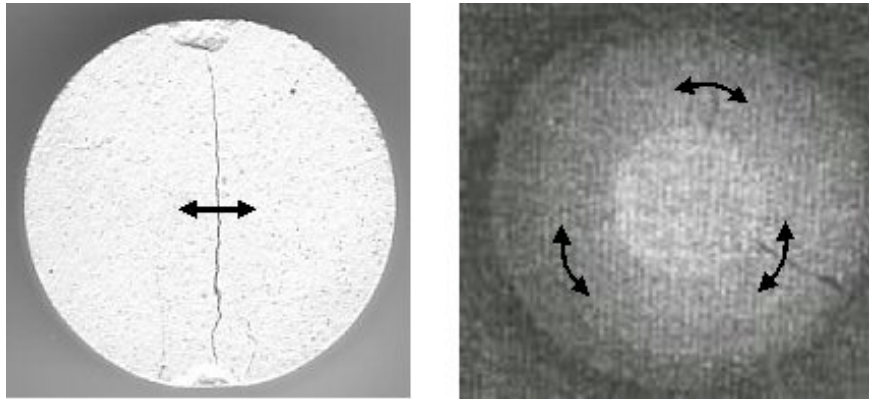


FIG. 1 – Rupture des pastilles (à gauche) et des sphères (à droite)

- Dans le cas de la pastille la fissure suit une direction diamétrale indiquant que la contrainte de traction est maximale au voisinage de l'axe de charge.
- Dans le cas de la sphère, la situation est un peu plus complexe. Elle se fend en général en trois quartiers égaux, indiquant que la contrainte azimutale est la contrainte de traction maximale.

Analyse élastique

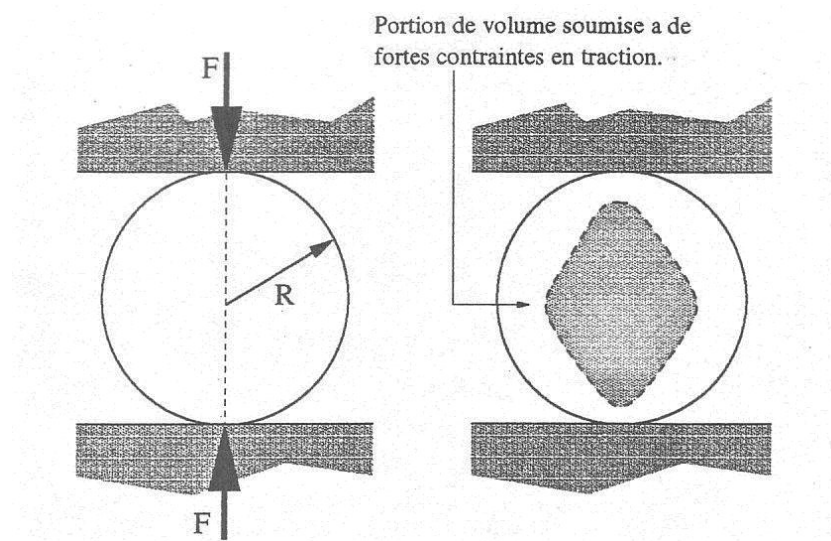


FIG. 2 –

La résolution de ce problème en élasticité linéaire en dimension $d=2$ pour la pastille et $d=3$ pour la sphère confirme ces constatations. A l'exception des voisinages immédiats des points d'application des

efforts, la contrainte de traction prend sa valeur maximale $\sigma_{Max} = \frac{2^{d-1}}{\pi} \frac{F}{\phi^{d-1}}$ au voisinage de l'axe de chargement et prend des valeurs significatives dans un volume V_T (volume de traction) proportionnel au volume total V : $V_T = \beta V$, le coefficient de proportionnalité β , fonction de la seule géométrie du grain, se situant dans l'intervalle [0,5-1].

I) Approche en rupture

1°) En notant σ_R la contrainte de rupture en traction caractéristique du matériau fragile, établir le critère de rupture et en déduire la relation entre la dimension d et l'exposant α ainsi que l'expression du préfacteur K_0 . Quelle est la dimension de ce préfacteur ? Cette approche est-elle compatible avec les résultats expérimentaux ?

2°) En analysant les dimensions de la force F_R et du préfacteur K_0 dans le cas des exposants expérimentaux, à quel paramètre mécanique propre au matériau est relié le préfacteur K_0 ? Que suggère ce résultat quant à l'origine de la fissuration ? Établir le critère de rupture adapté. Pour quel type de matériau le critère utilisé à la question 1°) s'applique-t-il ?

3°) Le facteur d'intensité de contrainte K étant, à un coefficient multiplicatif près proche de l'unité, égal au produit de la contrainte de traction σ par la racine carré de la taille c de la fissure, établir l'expression de la force de rupture en compression F_R en fonction du diamètre ϕ du grain ou de la pastille. Le résultat obtenu est-il cohérent avec la loi expérimentale.

4°) Une étude des résultats expérimentaux obtenus sur divers matériaux montre que l'exposant α de l'ordre de $d - \frac{3}{2}$ présente une variabilité fonction de la nature du matériau.

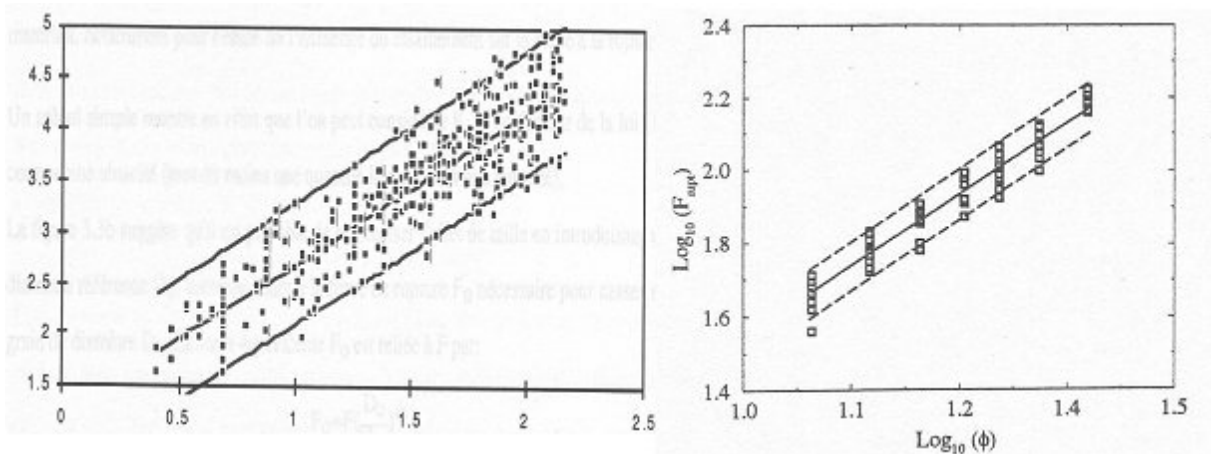


FIG. 3 – Clinker (à gauche) Plâtre (à droite)

Alors que $\alpha=1,5\pm 0,1$ pour les grains de clinker (ciment issus des fours cimentiers avant broyage), il prend une valeur de $1,6\pm 0,1$ pour des sphères en plâtre à modeler.

A quels paramètres, non pris en compte dans le modèle précédent, peut-on attribuer la variabilité de l'exposant α constatée expérimentalement ?

II) Statistique de Weibull et rupture des grains et des pastilles

5°) En utilisant les résultats rappelés en annexe, établir la relation entre la force de rupture en compression diamétrale F_R et la probabilité p_S de survie d'un grain ou une pastille dont le matériau répond à une loi de Weibull de module m .

6°) Compte tenu des résultats de l'analyse élastique à quel volume peut être assimilé V_{eff} ? En déduire que F_R se met sous la forme $K_0\phi^\alpha$ et donner les expressions de K_0 et α . Tracer sur un même graphique l'allure de la fonction $\alpha(m)$ pour $d=2$ et $d=3$.

7°) Comment se situent les modèles développés en première partie par rapport à cette nouvelle approche ?

III) Validation expérimentale du modèle

Afin de valider le modèle, trois séries d'essais ont été conduites sur des éprouvettes en plâtre à modeler fabriquées selon le même protocole.

8°) Éprouvettes de longueur l à section rectangulaire (b, h) soumises à flexion trois points. La mesure de la probabilité de survie p_S en fonction de la force F appliquée a conduit au résultat suivant :

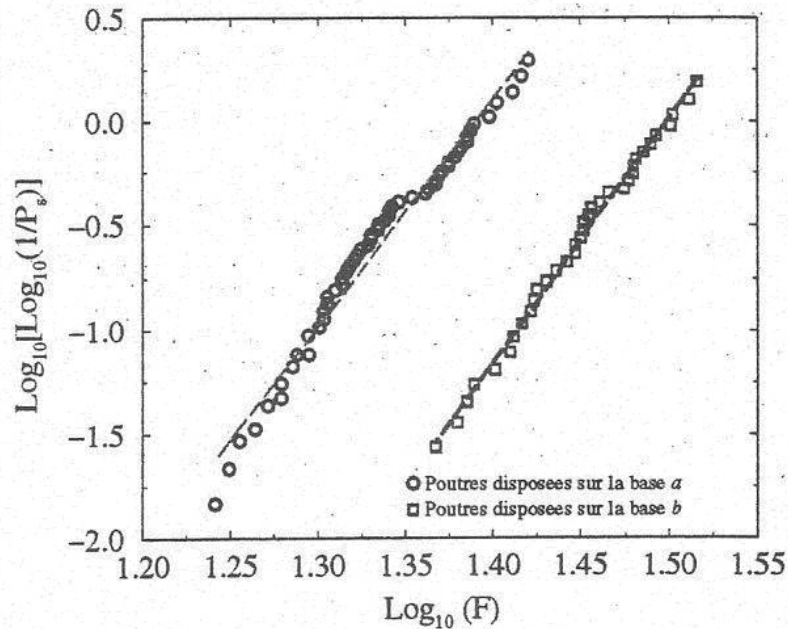


FIG. 4 – Plâtre en flexion 3 points : résultats expérimentaux

Etablir la relation donnant l'expression de la probabilité de survie p_S de l'éprouvette en fonction de la charge F appliquée et déduire la valeur m du module de Weibull du plâtre utilisé.

9°) Pastilles et sphères de plâtre soumises à compression diamétrale. La mesure de la force moyenne de rupture en fonction du diamètre a conduit aux résultats suivants :

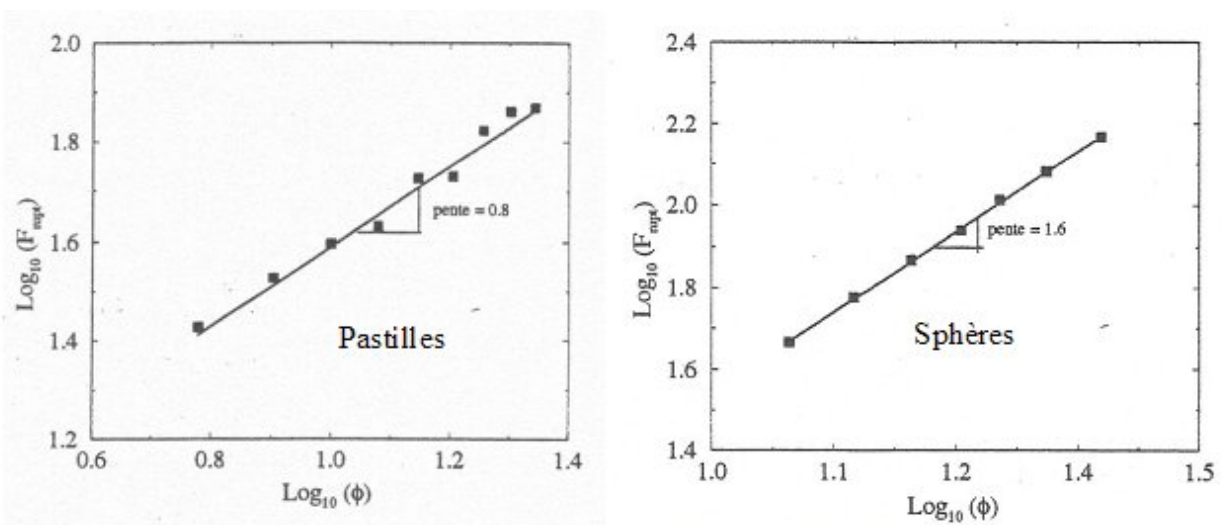


FIG. 5 – pastilles et sphères en Plâtre en compression diamétrale : résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux sont-ils de nature à valider le modèle statistique ?

Théorie de Weibull, rappel

De petits échantillons géométriquement identiques découpés dans un gros bloc de matériau fragile, présentent une dispersion de résistance mécanique attribuée à la dispersion de la taille des défauts préexistants qu'ils contiennent.

Définissant la probabilité de survie $p_S(\sigma, V_0)$ d'une population d'échantillons de même volume V_0 d'un même matériau fragile comme étant la fraction qui survit à la contrainte uniforme de traction appliquée σ , Weibull, ingénieur suédois, montra que la dispersion des résultats expérimentaux était bien représentée par la loi :

$$p_S(\sigma, V_0) = \exp\left(-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right)$$

dans laquelle m module de Weibull est un paramètre caractéristique du matériau et σ_0 une contrainte typique fonction à la fois du type de matériau et du volume V_0 de l'échantillon.

Par ailleurs, lorsque l'on fait varier la taille des échantillons, un gros échantillon ayant une probabilité supérieure à celle d'un petit de contenir un gros défaut, on constate qu'en moyenne, un gros échantillon se rompt pour une contrainte plus faible qu'un échantillon plus petit. Il y a dépendance de la résistance à rupture par rapport au volume selon la loi :

$$p_S(\sigma, V) = \exp\left(-\frac{V}{V_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right)$$

σ_{Max} étant dans une pièce de volume V la valeur maximale de la contrainte majeure positive (traction puisqu'il s'agit de rupture fragile) solution du problème élastique en contraintes inhomogènes, l'éprouvette équivalente supportant la traction homogène σ_{Max} devra avoir un volume $V = V_{eff}$ tel que les expressions des probabilités de survie soient identiques, soit :

$$p_S(\sigma, V) = p_S(\sigma_{Max}, V_{eff}) = \exp\left(-\frac{V_{eff}}{V_0}\left(\frac{\sigma_{Max}}{\sigma_0}\right)^m\right) \quad V_{eff} = \int_{V(\sigma>0)} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{Max}}\right)^m dV$$