

Mécanique du Solide et des Matériaux

Examen du 23 février 2005 : 13h30 – 17h00

Promotion 122

Avertissement

La plupart des résultats étant donnés dans les énoncés, la notation tiendra compte de la qualité des justifications et des arguments développés pour les établir

Documents

Tous les documents sont autorisés sauf les ouvrages et les photocopies d'ouvrages.

PARTIE A Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie

Durée

La durée de l'épreuve **partie A** est de **1h15**.

Les copies de la **partie A** seront ramassées à **14h45**.

Contenu

La **partie A** se compose d' **un exercice obligatoire** :

Exercice I (45 mn) (5 points)	[1] Détermination du module de Weibull
--------------------------------------	--

et d' **un exercice à choisir** selon le tableau suivant :

Exercice II (30 mn) (3 points)	[2] La glisse du skieur
ou	[3] Durabilité en fluage

PARTIE B Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie

Durée

La **durée normale** de l'épreuve partie B est de **2h00**, sa **durée maximale** de **2h15**.

Les copies **parties B** seront ramassées au plus tard à **17h00 précises**.

Contenu

La **partie B** se compose d'**un problème en trois parties**.

Fracturation de grains et pastilles fragiles

Les **III parties** sont obligatoires.

Partie I (60 mn) (6 point)	Approche en rupture
Partie II (30 mn) (3 points)	Statistique de Weibull et rupture des grains et des pastilles
Partie III (30 mn) (3 points)	Validation expérimentale du modèle statistique

Indications et Conseils

- **Lisez COMPLETEMENT les énoncés.**
- **Ne VOUS BLOQUEZ PAS sur une question, les résultats principaux sont donnés dans l'énoncé afin que vous puissiez CONTINUER.**

Détermination du module de Weibull

De petits échantillons géométriquement identiques découpés dans un gros bloc de matériau fragile, présentent une *dispersion de résistance mécanique* attribuée à la *dispersion de la taille des défauts* préexistants qu'ils contiennent. Par ailleurs, lorsque l'on fait varier la taille des échantillons, un gros échantillon ayant une probabilité supérieure à celle d'un petit de contenir un gros défaut, on constate qu'en moyenne, un gros échantillon se rompt pour une contrainte plus faible qu'un échantillon plus petit. Il y a *dépendance* de la *résistance* à rupture par rapport au *volume*.

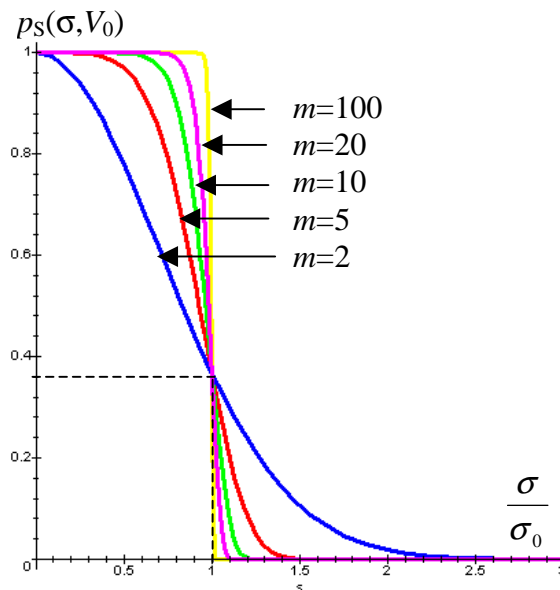
Définissant la probabilité de survie $p_s(\sigma, V_0)$ d'une population d'échantillons de même volume V_0 d'un même matériau fragile comme étant la fraction qui survit à la contrainte uniforme de traction appliquée σ , Weibull, ingénieur suédois, montra que la dispersion des résultats expérimentaux était bien représentée par la loi :

$$p_s(\sigma, V_0) = \exp\left(-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0(V_0)}\right)^m\right)$$

dans laquelle m module de Weibull est un paramètre caractéristique du matériau et σ_0 une contrainte typique fonction à la fois du type de matériau et du volume V_0 de l'échantillon.

1°) Donner la signification physique de la contrainte σ_0 pour un ensemble d'échantillons de volume V_0 ?

2°) En analysant la figure représentant la loi précédente, quelle caractéristique du matériau est associée à la valeur du module de Weibull m ? Comment varie-t-elle avec m ?



Que peut-on dire de la distribution de défauts préexistants dans un matériau à faible module de Weibull ($m < 20$) ?
 Que peut-on dire des matériaux à grand module de Weibull ? Quelle devient alors la signification physique de σ_0 ? A quel critère de rupture répondent-ils ?

Influence du volume

Weibull a émis l'hypothèse dite du maillon le plus *faible*, selon laquelle dans un solide de volume V constitué de la juxtaposition de N de ces échantillons la rupture de l'élément le plus faible entraîne la rupture du solide entier.

3°) A quelle hypothèse statistique correspond-elle ? En déduire l'expression de $p_s(\sigma, V)$ en fonction de σ , σ_0 , V , V_0 et m . Quel effet physique traduit cette loi d'évolution en fonction du volume V ?

Influence d'une répartition de contrainte inhomogène

4°) Lorsque l'échantillon est soumis à une répartition de contrainte σ variable d'un point à l'autre de l'échantillon, montrer qu'en décomposant l'échantillon en volumes élémentaires V_i la probabilité de survie s'écrit :

$$p_s(\sigma, V) = \exp\left(-\frac{1}{V_0 \sigma_0^m (V_0)} \int_V \sigma^m dV\right)$$

Justifiez pourquoi les V_i doivent être petits à l'échelle des variations de σ et grands à celle de V_0 .

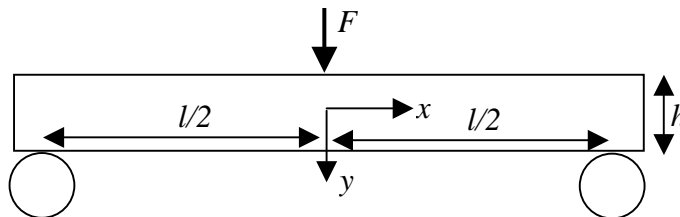
Volume effectif de Weibull

5°) σ_{Max} étant dans une pièce de volume V la valeur maximale de la contrainte majeure positive solution du problème élastique en contraintes inhomogènes, montrer que la probabilité de survie de la pièce s'écrit comme celle d'une pièce équivalente soumise à la contrainte uniforme σ_{Max} à condition de remplacer son volume par un volume effectif V_{eff} dont l'expression sous forme d'intégrale de volume est :

$$V_{eff} = \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_{Max}}\right)^m dV$$

Application à la flexion 3 points

6°) La détermination de la résistance à la rupture des matériaux fragiles s'effectue généralement par un test de flexion trois points sur éprouvette à section rectangulaire (bh).



Justifier le fait que la rupture se produise à l'aplomb de la charge et démontrer que la répartition des contraintes dans l'éprouvette s'exprime par :

$$\sigma = \sigma_r \frac{4y(l/2 - |x|)}{hl}$$

où σ_r , module de rupture en flexion, est une contrainte dont on précisera la nature. Quelle est la relation entre σ_r et σ_{Max} ?

7°) Sachant que :

$$\int_{x=-l/2}^{l/2} \int_{y=0}^{h/2} \left(\frac{l}{2} - |x|\right)^m y^m dx dy = \left(\frac{hl}{4}\right)^{m+1} \frac{2}{(m+1)^2}$$

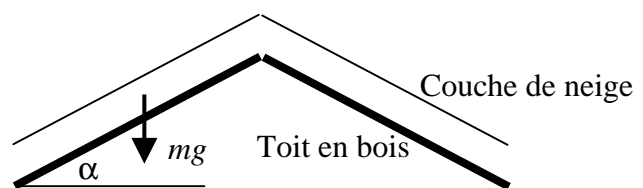
calculer le volume effectif V_{eff} associé à cette répartition inhomogène de contrainte en faisant apparaître le volume total V de l'éprouvette et en déduire l'expression de la probabilité de survie $p_s(\sigma_r, V)$.

$$p_s(\sigma_r, V) = \exp\left(-\frac{V}{V_0} \frac{1}{2(m+1)^2} \left(\frac{3F_R l}{2bh^2 \sigma_0}\right)^m\right)$$

F_R désignant la charge provoquant la rupture.

La glisse du skieur

1°) Sur les toits en bois des chalets de montagne, on s'est aperçu que la neige tenait lorsque la pente α de la toiture était inférieure à 24° . Sachant que le coefficient de frottement μ est le rapport de la composante tangentielle de la force provoquant le glissement à sa composante normale, déterminer la valeur du coefficient de frottement neige-bois.



2°) Quelle est la force F que doit développer un skieur de fond pesant 100 kg équipement compris équipé de skis en bois (historiquement le premier matériau de fabrication des skis) pour avancer sur sol horizontal en faisant glisser ses skis.

3°) En pratique, les skieurs peuvent glisser sur une pente neigeuse inclinée de 2° seulement par une température extérieure de 0°C . Calculer alors le coefficient de frottement apparent μ_{app} . Compte tenu de cette valeur, quel mécanisme serait de nature à expliquer ce paradoxe ?

4°) Notre skieur de 100 kg est équipé de skis de $l = 2\text{m}$ de long et de $b = 10\text{ cm}$ de large. Lorsqu'il glisse sur une pente inclinée de 2° par 0°C de température extérieure, calculer la variation d'énergie potentielle et en déduire le travail W fourni pour vaincre les forces de frottement lorsque ses skis ont parcouru une distance égale à leur propre longueur.

5°) En déduire l'épaisseur moyenne e de la pellicule d'eau sous ses skis sachant que la chaleur latente de fusion C_f de la glace vaut 330 MJ.m^{-3} . Que se passe-t-il si la température extérieure descend très nettement en dessous de zéro. Pensez aux avatars des expéditions polaires.

Durabilité en fluage

Dans une unité de production d'une usine chimique, un tube cylindrique en acier inoxydable à 15% de chrome est soumis à une pression relative interne $\Delta p = 6\text{ Mpa}$. Ce tube doit pouvoir supporter cette pression à une température de 510°C pendant 10 ans. Le concepteur a prévu un tube de diamètre intérieur $\phi = 40\text{ mm}$ et d'épaisseur $e = 2\text{ mm}$.

La fiche technique de l'alliage, fournie par le fabricant, comporte les données suivantes :

Température ($^\circ\text{C}$)	618	640	660	683	707
$\dot{\epsilon}$ Vitesse de fluage quasi stationnaire (s^{-1}) sous une contrainte $\sigma = 200\text{ MPa}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \cdot 10^{-7}$	$7,7 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$

Déformation à rupture $\epsilon_R = 0,01$.

Pour cette gamme de contraintes et de températures, on admet que la loi de fluage

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} = A\sigma^5 e^{-\frac{Q}{RT}}$$

représente correctement le comportement de l'alliage.

1°) Déterminer les valeurs et les unités des constantes A et $\frac{Q}{R}$ à partir des données de la fiche technique.

En déduire sa température de fusion T_f (en $^\circ\text{C}$) sachant que pour ce type d'alliage $\frac{Q}{RT_f} = 15,5$.

2°) Déterminer, en fonction de ϕ, e et p , la valeur de la contrainte majeure σ régnant dans la paroi du tube sous pression. Calculer sa valeur.

3°) En déduire la déformation ϵ du tube au bout de 10 années de fonctionnement. Commenter le niveau de sécurité de cette conception.

4°) Estimer, en années, la durée de vie de ce tube. Justifier pourquoi cette estimation est une estimation par excès.

Fracturation des grains et pastilles fragiles

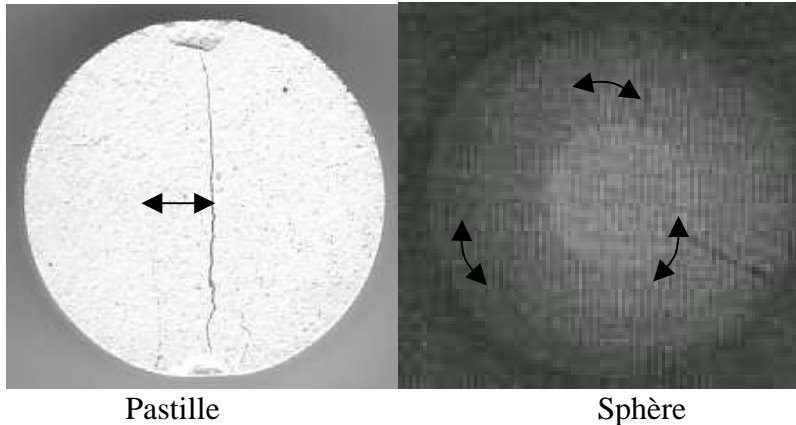
Introduction

Constatations expérimentales

Lorsque un grain (dimension $d=3$) ou une pastille (dimension $d=2$) en matériau fragile sont soumis à une compression diamétrale, **l'expérience montre** que la force de rupture en compression F_R est une fonction croissante du diamètre ϕ du grain ou de la pastille bien représentée par la loi :

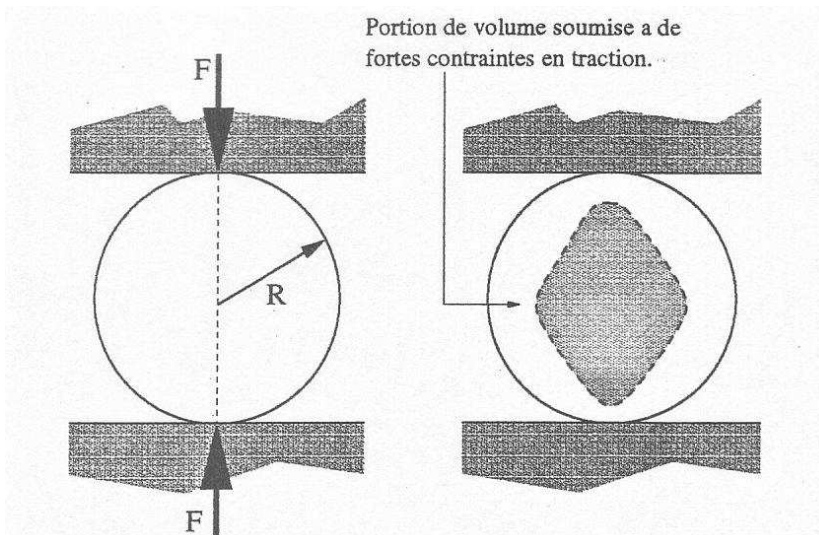
$$F_R = K_0 \phi^\alpha \quad \alpha \approx d - \frac{3}{2}$$

Elle met également en évidence les modes de rupture suivants :



- Dans le cas de la pastille la fissure suit une direction diamétrale indiquant que la contrainte de traction est maximale au voisinage de l'axe de charge.
- Dans le cas de la sphère, la situation est un peu plus complexe. Elle se fend en général en trois quartiers égaux, indiquant que la contrainte azimutale est la contrainte de traction maximale.

Analyse élastique



La résolution de ce problème en élasticité linéaire en dimension $d=2$ pour la pastille et $d=3$ pour la sphère confirme ces constatations. A l'exception des voisinages immédiats des points d'application des efforts, la contrainte de traction prend sa valeur maximale $\sigma = \frac{F}{\pi R^{d-1}}$ au voisinage de l'axe de chargement et prend des valeurs significatives dans un volume V_T (volume de traction) proportionnel au volume total V : $V_T = \beta V$, le coefficient de proportionnalité β , fonction de la seule géométrie du grain, se situant dans l'intervalle $[0,5-1]$.

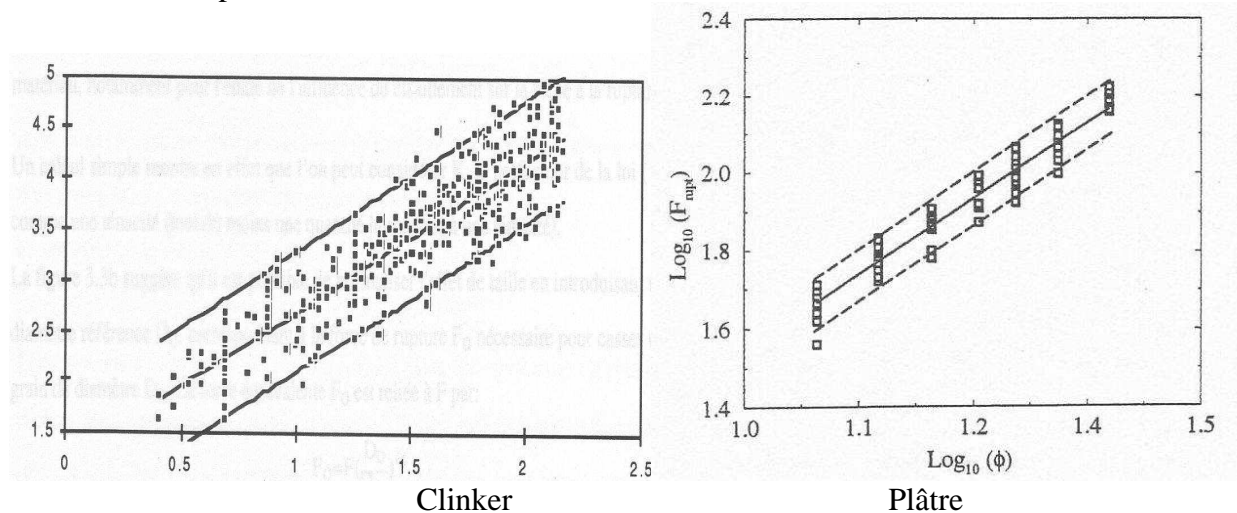
I) Approche en rupture

1°) En notant σ_R la contrainte de rupture en traction caractéristique du matériau fragile, établir le critère de rupture et en déduire la relation entre la dimension d et l'exposant α ainsi que l'expression du préfacteur K_0 . Quelle est la dimension de ce préfacteur ? Cette approche est-elle compatible avec les résultats expérimentaux ?

2°) En analysant les dimensions de la force F_R et du préfacteur K_0 dans le cas des exposants expérimentaux, à quel paramètre mécanique propre au matériau est relié le préfacteur K_0 ? Que suggère ce résultat quant à l'origine de la fissuration ? Établir le critère de rupture adapté. Pour quel matériau le critère utilisé précédemment s'applique-t-il ?

3°) Le facteur d'intensité de contrainte K étant, à un coefficient multiplicatif près proche de l'unité, égal au produit de la contrainte de traction σ par la racine carré de la taille c de la fissure, établir l'expression de la force de rupture en compression F_R en fonction du diamètre ϕ du grain ou de la pastille. Le résultat obtenu est-t-il cohérent avec la loi expérimentale.

4°) Une étude des résultats expérimentaux obtenus sur divers matériaux montre que l'exposant α de l'ordre de $d-3/2$ présente une variabilité fonction de la nature du matériau.



Alors que $\alpha=1,5\pm 0,1$ pour les grains de clinker (ciment issus des fours cimentiers avant broyage), il prend une valeur de $1,6\pm 0,1$ pour des sphères en plâtre à modeler. A quels paramètres, non pris en compte dans le modèle précédent, peut-on attribuer la variabilité de l'exposant α constatée expérimentalement ?

II) Statistique de Weibull et rupture des grains et des pastilles

5°) En utilisant les résultats démontrés dans l'exercice portant sur la *Détermination du module de Weibull*, démontrer que pour un grain ou une pastille dont le matériau répond à une loi de Weibull de module m la force à rupture en compression diamétrale F_R suit la loi :

$$F_R = \pi \sigma_0 R^{d-1} \left(-\frac{V_0}{V_{\text{eff}}} \text{Ln} p_s \right)^{1/m}$$

6°) Compte tenu des résultats de l'analyse élastique à quel volume peut être assimilé V_{eff} ? En déduire que F_R se met sous la forme $K_0 \phi^\alpha$ et donner les expressions de K_0 et α . Tracer sur un même graphique l'allure de la fonction $\alpha(m)$ pour $d=2$ et $d=3$.

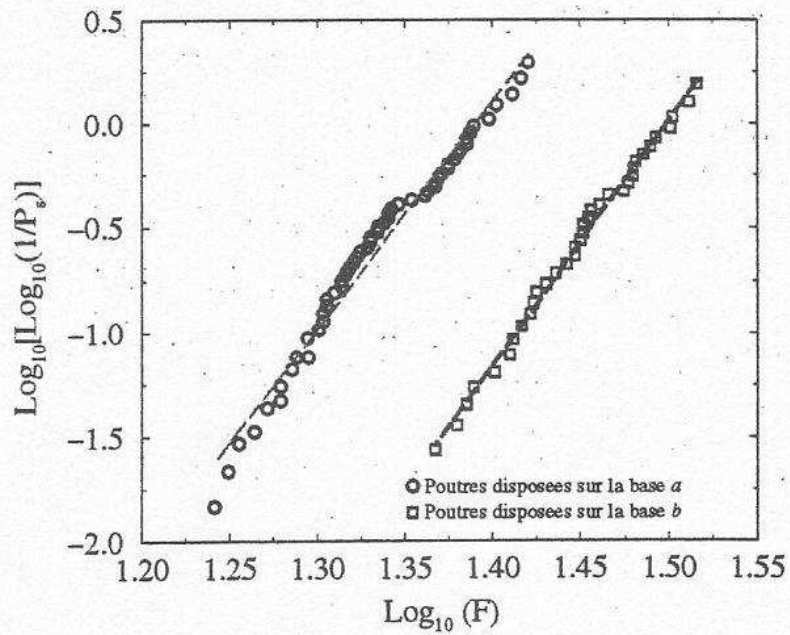
7°) Comment se situent les modèles développés en première partie par rapport à cette nouvelle approche ?

III) Validation expérimentale du modèle

Afin de valider le modèle, trois séries d'essais ont été conduites sur des éprouvettes en plâtre à modeler fabriquées selon le même protocole.

8°) Éprouvettes à section rectangulaire soumises à flexion trois points.

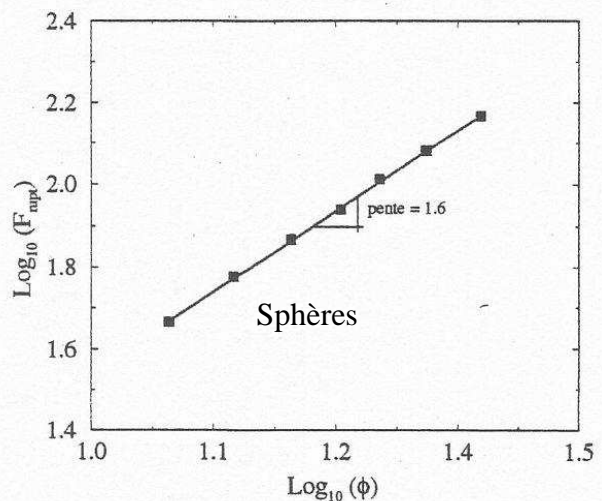
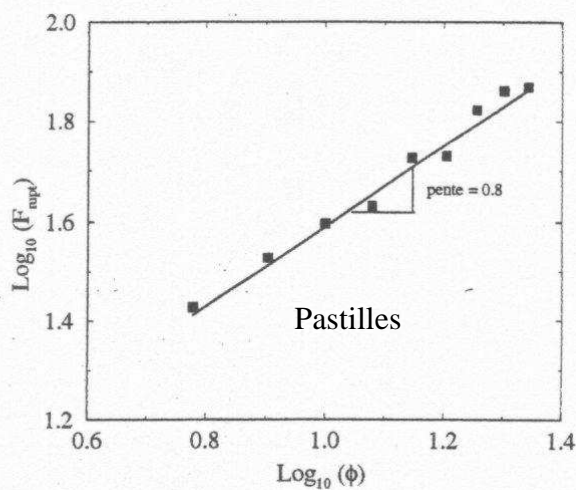
La mesure de la probabilité de survie en fonction de la force F appliquée a conduit au résultat suivant :



Déterminer le module m de Weibull du plâtre utilisé en vous appuyant sur le résultat démontré dans l'exercice portant sur la Détermination du module de Weibull, application à la flexion trois points

9°) Pastilles et sphères de plâtre soumises à compression diamétrale.

La mesure de la force moyenne de rupture en fonction du diamètre a conduit aux résultats suivants :



Les résultats expérimentaux sont-ils de nature à valider le modèle statistique ?