

# Mécanique du Solide et des Matériaux

Examen du 7 février 2006 : 13h30 – 17h00  
Promotion 123

## Avertissement

*La plupart des résultats étant donnés dans les énoncés, la notation tiendra compte de la qualité des justifications et des arguments développés pour les établir.*

## PARTIE A

Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie

### Documents

Aucun document autorisé.

### Durée

La durée de l'épreuve **partie A** est de **1h15**.

Les copies de la **partie A** seront ramassées à **14h45**.

### Contenu

La **partie A** se compose d' **un exercice obligatoire** :

<b>Exercice I</b> (45 mn) (5 points)	[1] Poinçonnement
--------------------------------------	-------------------

et d' **un exercice à choisir** selon le tableau suivant :

<b>Exercice II</b> (30 mn) (3 points)	[2] Ténacité et Limite élastique
ou	[3] Rupture d'une tôle forte

## PARTIE B

Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie

### Documents

Tout document autorisé sauf ouvrages et photocopies d'ouvrages.

### Durée

La **durée normale** de l'épreuve partie B est de **2h00**.

Les copies **parties B** seront ramassées au plus tard à **17h00 précises**.

### Contenu

La **partie B** se compose d'**un problème en deux parties**.

## Fonctionnement d'un bilame

Les deux parties sont obligatoires et ne sont pas indépendantes

<b>Partie I</b> (60 mn) (6 point)	Poutre composite
<b>Partie II</b> (60 mn) (6 points)	Bilame

### Indications et Conseils

- Lisez **COMPLETEMENT** les énoncés.
- Ne **VOUS BLOQUEZ PAS** sur une question, les résultats principaux sont donnés dans l'énoncé afin que vous puissiez **CONTINUER**.



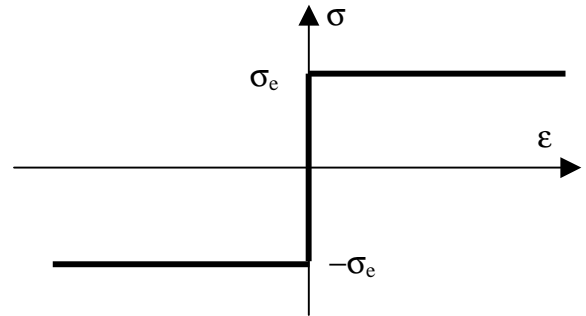
## Exercice obligatoire

# Poinçonnement

### Matériau

La loi de comportement d'un matériau modèle est représentée par la courbe ci-dessous :

- 1°) Que représente la quantité  $\sigma_e$
- 2°) S'agit-il d'un matériau ductile ou fragile ? Justifiez votre réponse.
- 3°) Déterminer la résistance au cisaillement  $k$  de ce matériau.
- 4°) Que peut-on dire des déformations élastique et plastique de ce matériau.



### Poinçonnement

Un poinçon indéformable (largeur  $L$  profondeur  $b$ ) exerce un effort  $F$  normal à la surface d'une tranche de ce matériau modèle. L'écoulement du matériau sous l'action de la force  $F$  est **schématisé** sur la figure ci-dessous. Cet écoulement est défini par blocs :

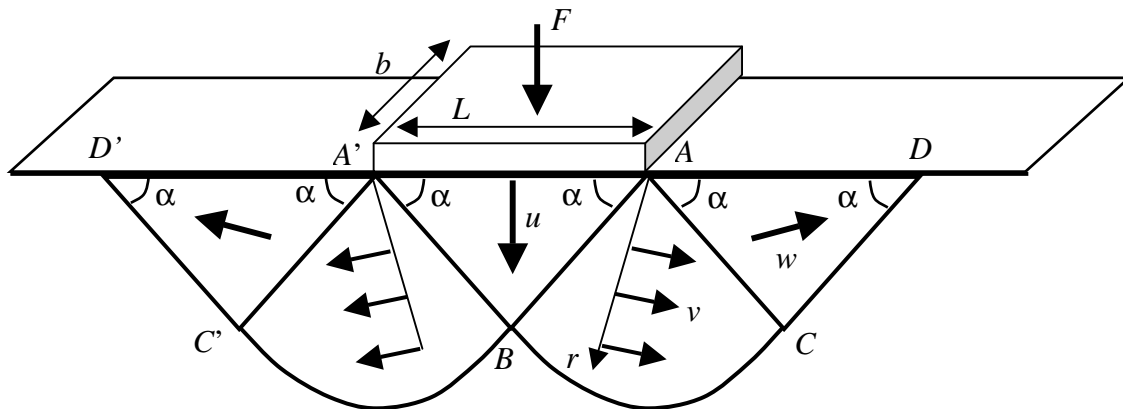
Le bloc rigide  $ABA'$  se translate normalement à la surface de la quantité  $u$ .

Le bloc rigide  $ACD$  se translate de la quantité  $w$ .

Le bloc  $ABC$  se déforme dans un champ de déplacement de composantes  $u_r=0$  et  $u_\theta=v$  dans le repère polaire d'origine  $A$ .

Les blocs  $A'C'D'$  et  $A'BC'$  ayant des comportements symétriques de ceux des blocs  $ACD$  et  $ABC$ .

Le reste du matériau ne subit pas de déplacement.



5°) Pour quelle raison physique doit-t-on prendre  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  ?

6°) Un champ de déplacement par bloc est réputé cinématiquement admissible s'il est continu et dérivable par morceaux. De plus un matériau **rigide plastique parfait** impose la continuité de la composante du déplacement perpendiculaire aux lignes de glissements entre blocs. En déduire, en fonction de  $u$  et  $\alpha$ , l'amplitude de la composante  $u_\theta=v$  ainsi que l'amplitude et la direction de  $w$ . Quels sont les lignes de glissement du poinçonnement et les amplitudes des sauts de déplacement associées ?

7°) Établir les expressions du tenseur des déformations  $\bar{\epsilon}$  et du tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$  dans le repère polaire du bloc  $ABC$  lors de l'écoulement. A quelle sollicitation correspondent-ils ?

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad 2\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

8°) Déterminer le travail dépensé  $W^P$  lors du poinçonnement, le travail  $W$  fourni par  $F$  et en déduire la relation entre  $F$  et la surface  $S$  du poinçon.

## Exercice au choix

### Ténacité et limite élastique

La ténacité d'un acier à haute résistance (acier maraging) décroît lorsque la limite d'élasticité augmente selon la loi  $K_C = K_M \cdot \alpha R_P$ . Une plaque de sécurité est utilisée en régime élastique dans des conditions où **aucune propagation de fissure n'est tolérée**. La contrainte de service  $\sigma_S$  peut atteindre la valeur  $\frac{R_P}{S}$  où  $S > 1$  est un coefficient de sécurité. Les techniques de contrôle du fournisseur permettent de détecter des défauts de taille  $a_o$  à  $\pm \Delta a_o$  près.

Sachant que le facteur d'intensité de contrainte associé à ce type de défaut est donné par  $K = 2\sigma \sqrt{a}$  déterminer littéralement puis numériquement les caractéristiques  $K_C$  et  $R_P$  de l'acier à utiliser pour cette application ainsi que la contrainte de service  $\sigma_S$  maximale applicable.

A.N.:  $K_M = 360 \text{ Mpa} \cdot \text{m}^{1/2}$        $\alpha = 0,15$  si  $R_P$  est exprimé en Mpa       $S = \frac{4}{3}$        $a_o = 5 \text{ mm}$        $\Delta a_o = 2,5 \text{ mm}$

## Exercice au choix

### Rupture d'une tôle forte

Une tôle forte en acier de ténacité  $K_C = 53 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$  et de limite d'élasticité  $R_P = 950 \text{ MPa}$ , examinée aux rayons X, ne présente pas de défaut détectable.

1°) Déterminer la dimension  $a_C$  du défaut qui caractérise la transition entre les deux modes de ruine que l'on précisera. On admet que le facteur d'intensité de contrainte est donné par  $K = \sigma \sqrt{\pi a}$  pour ce type de défaut.

2°) Sachant que l'appareillage utilisé permet de déceler individuellement toutes les fissures de longueur supérieure à  $a_D = 1 \text{ mm}$ , déterminer le mode de ruine et la contrainte  $\sigma_R(a)$  associée en fonction de la dimension  $a$  du plus grand défaut initial.

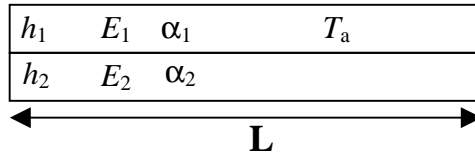
3°) Déterminer le mode et la valeur de la contrainte de rupture  $\sigma_R(a_D)$  pour un défaut initial de taille juste inférieure à la taille détectable  $a_D$ .

4°) Sachant que la contrainte maximale de service  $\sigma_S$ , fixée à  $900 \text{ MPa}$ , peut accidentellement atteindre  $950 \text{ MPa}$ , le choix de cette nuance d'acier vous paraît-il bien adapté du point de vue de la sécurité des personnes ? Justifiez votre réponse. Quel paramètre faudrait-il modifier et dans quel sens ?

5°) Sachant que cette tôle doit être utilisée comme élément de construction de la poutre d'un pont roulant, que pensez-vous de l'évolution des risques à terme et quelle solution faut-il envisager pour s'en prémunir.

## Fonctionnement d'un bilame

La partie active d'un thermostat mécanique, le bilame, est constitué de deux lames métalliques ① et ② de modules d'Young  $E_1$  et  $E_2$ , de limites élastiques (traction ou compression)  $R_1^p$  et  $R_2^p$ , d'épaisseurs  $h_1$  et  $h_2$  de coefficient de dilatation thermique linéaire  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , de même longueur  $L$  et même largeur  $b$  assemblées entre elles de sorte que le bilame ainsi constitué soit à l'état de repos (non contraint) à la température  $T_a$ .



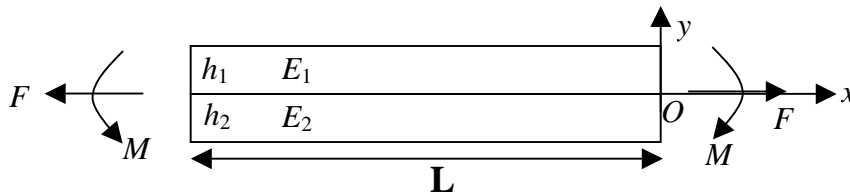
Données numériques :

Bilame :  $T_a = 20\text{ °C}$        $L = 40\text{ mm}$        $b = 5\text{ mm}$

Lame	Métal	$E$ (Gpa)	$h$ (mm)	$\alpha$ ( $K^{-1}$ )
①	Zinc	69,75	0,1	$3,02 \cdot 10^{-5}$
②	Cuivre	124	0,075	$1,65 \cdot 10^{-5}$

### I) Poutre composite

Avant de prendre en compte les effets des variations de température, étudions le comportement de cet assemblage à la température  $T_a$  lorsqu'il est soumis à des efforts externes de traction et/ou de flexion. Le bilame peut alors être vu comme une poutre composite. L'assemblage des deux lames est tel que l'adhérence soit parfaite entre les deux matériaux et qu'à l'interface la déformation résultante soit identique dans les deux matériaux.



Cette poutre est soumise à l'action conjointe d'une force de traction axiale  $F$  et d'un moment de flexion  $M$ . On se place dans le cas où  $F$  et  $M$  sont suffisamment faibles pour que le rayon de courbure  $R$  reste grand devant la longueur  $L$  de la poutre de sorte que les hypothèses de la résistance des matériaux (flexion faible) soient vérifiées.

1°) En notant  $R > 0$  le rayon de courbure pris par l'interface et  $\epsilon_0$  la déformation d'allongement de l'interface, établir, en fonction de  $R$ ,  $\epsilon_0$  et  $y$ , la loi de variation de la déformation  $\epsilon(y)$  de la poutre composite.

2°) En déduire, en fonction de  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $R$ ,  $\epsilon_0$  et  $y$  la nature et la loi de variation des contraintes  $\sigma_1(y)$  et  $\sigma_2(y)$  dans les deux couches constitutives de la poutre composite. Établir la relation entre  $\sigma_1(0)$  et  $\sigma_2(0)$ .

3°) En écrivant les conditions d'équilibre mécanique de la poutre composite, montrer que les efforts externes  $F$  et  $M$  appliqués sont liés au rayon de courbure  $R$  et à la déformation  $\epsilon_0$  de l'interface par :

$$\begin{vmatrix} F \\ M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d \\ d & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_0 \\ \frac{1}{R} \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} E_1 h_1 + E_2 h_2 & \frac{1}{2}(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2) \\ \frac{1}{2}(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2) & \frac{1}{3}(E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_0 \\ \frac{1}{R} \end{vmatrix}$$

4°) Sachant que le déterminant  $ac-d^2$  vaut  $\frac{b^2}{12} \{E_1^2 h_1^4 + E_2^2 h_2^4 + 2E_1 E_2 h_1 h_2 (2h_1^2 + 3h_1 h_2 + 2h_2^2)\}$ , montrer qu'il existe toujours une solution et déterminer les expressions de  $\epsilon_0$  et de  $\frac{1}{R}$  en fonction de  $F$ ,  $M$ ,  $a$ ,  $d$  et  $c$ .

5°) Quelle condition doit vérifier la poutre composite pour qu'elle ne fléchisse pas sous l'action du seul effort axial  $F$ ? En déduire l'expression du module d'Young  $E$  de la poutre homogène équivalente de même géométrie.

6°) Sous l'action du seul moment  $M$ , quelle condition doit vérifier la poutre composite pour que l'interface soit fibre neutre? En déduire l'expression de la raideur de flexion  $EI$  de la poutre homogène équivalente de même géométrie et l'équation différentielle régissant sa déformée.

7°) Le bilame vérifie-t-il le découplage des effets de Traction et de Flexion ?

## II) Bilame

Prenons maintenant en compte l'effet bilame et étudions le comportement de cet assemblage en fonction de la température, en l'absence de tout effort externe appliqué.

1°) Exprimer en fonction de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $T$  et  $T_a$  les déformations thermiques libres  $\epsilon_{th1}$  et  $\epsilon_{th2}$  de chacune des lames prises séparément lorsque la température varie de  $T_a$  à  $T$ .

2°) Dorénavant nous supposons que  $T-T_a > 0$  et que  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Justifiez que la même variation de température produit sur le bilame (lames assemblées) une flexion dont on déterminera le sens.

3°) En déduire sans calcul la nature et le signe des contraintes  $\sigma_1(0)$  et  $\sigma_2(0)$  développées par l'élévation de température de part et d'autre de l'interface et montrer que la condition d'adhérence parfaite implique la relation :

$$\alpha_1(T-T_a) + \frac{\sigma_1(0)}{E_1} = \epsilon_0 = \alpha_2(T-T_a) + \frac{\sigma_2(0)}{E_2}$$

$\epsilon_0$  désignant la déformation d'allongement de l'interface.

4°) Dessiner l'allure de la répartition de contrainte dans l'épaisseur du bilame à la température  $T$ .

5°) On se place dans le cas où  $T-T_a$  est suffisamment faible pour que les hypothèses de la résistance des matériaux (flexion faible) soient vérifiées. Montrer que l'effet de la variation de température équivaut à imposer au bilame à la température  $T_a$  une force axiale  $F$  et un moment de flexion  $M$  donnés par :

$$F = (E_1 \alpha_1 h_1 + E_2 \alpha_2 h_2) b (T - T_a) \quad M = -\frac{1}{2} (E_1 \alpha_1 h_1^2 - E_2 \alpha_2 h_2^2) b (T - T_a)$$

6°) Le bilame étant construit de telle manière que sa géométrie vérifie la condition  $J = E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2$ , établir l'expression de  $\frac{1}{R}$  en fonction de  $T-T_a$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $h_1$  et  $h_2$ .

7°) Quelle forme prend le bilame, initialement rectiligne à la température  $T_a$ , lorsque l'on fait varier sa température? Déterminer la flèche  $\delta(T)$  prise par le bilame encasté à une de ses extrémités en fonction de la température. Calculer cette flèche pour une température de 65 °C.