

**Mécanique du Solide et des Matériaux**  
**Examen du mercredi 14 février 2007 : 13 h-17h Promotion 124**

**Avertissement**

*La plupart des résultats étant donnés dans les énoncés, la notation tiendra compte de la qualité des justifications et des arguments développés pour les établir.*

**Partie A** *Écrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

La durée de l'épreuve partie A est de **1h15**. Les copies de la partie A seront ramassées à la fin de ce délai.

**Aucun document n'est autorisé.**

La partie A se compose d'un exercice obligatoire et d'un exercice à choisir parmi deux selon le tableau suivant :

Exercice 1	<b>obligatoire</b>	45 mn	5 points	Déformation et Contrainte dans un fil
Exercice 2	<i>au choix</i>	30 mn	3 points	Objets élanés
Exercice 3	<i>au choix</i>	30 mn	3 points	Matériaux pour ressort de suspension

**Partie B** *Écrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

La durée normale de l'épreuve partie B est de **2h30**, sa durée maximale de 2h45. Les copies seront ramassées au plus tard à **17h00** précises.

Tous les documents sont autorisés **sauf les ouvrages et les photocopies d'ouvrages.**

La partie B se compose d'un problème en 4 parties **toutes obligatoires.**

Partie 1	<b>obligatoire</b>	30 mn	3 points	Poinçonnement
Partie 2	<b>obligatoire</b>	30 mn	3 points	Contact de Hertz
Partie 3	<b>obligatoire</b>	50 mn	4 points	Forces d'adhésion
Partie 4	<b>obligatoire</b>	25 mn	2 points	Énergie d'adhésion et module d'Young

**Indications et Conseils**

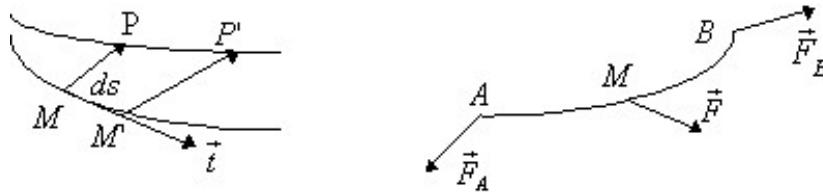
Lisez *complètement* les énoncés.

Ne vous bloquez pas sur une question, les résultats principaux sont donnés dans l'énoncé afin que vous puissiez *continuer*.

**Mécanique du Solide et des Matériaux**  
**Examen - Partie A - Promotion 124**

**Exercice obligatoire : Déformation et Contrainte dans un fil**

Le point courant  $M$  d'un fil de section  $S$  constante, considéré comme un objet unidimensionnel, est repéré par son abscisse curviligne  $s$ .



1°) Le fil étant soumis à un champ de déplacement  $\vec{u}(M)$ , le tenseur des déformations se réduit à une seule composante (on parle *naturellement* de la déformation d'un fil) donnée par définition par :  

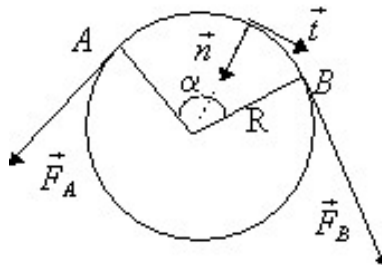
$$\varepsilon(s) = \frac{|\overrightarrow{PP'}| - |\overrightarrow{MM'}|}{|\overrightarrow{MM'}|}$$
 $\vec{t}$  étant le vecteur tangent au fil au point  $M$ , établir l'expression  $\varepsilon(s) = \vec{t} \frac{d\vec{u}}{ds}$  de la déformation dans l'hypothèse des petites déformations.

2°) On appelle  $\vec{F}(M)$  le champ de forces extérieures (par unité de longueur) appliquées au morceau de fil  $AB$  et  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  les réactions d'extrémité. Imposons un champ de déplacement virtuel  $\delta\vec{u}(s)$  et notons  $\delta\vec{u}_A$  et  $\delta\vec{u}_B$  les valeurs de ce champ aux extrémités  $A$  et  $B$  du fil. Établir l'expression  $\delta W$  du travail virtuel des forces externes et démontrer que  $\delta E$  travail des forces internes s'écrit :

$$\delta E = -S \int_A^B \frac{d\sigma(s)}{ds} \vec{t} \delta\vec{u}(s) ds + S\sigma \vec{t}_B \delta\vec{u}_B - S\sigma \vec{t}_A \delta\vec{u}_A$$

expression dans laquelle  $\sigma$  est *naturellement* la seule composante du tenseur des contraintes du fil.

3°) En appliquant le principe des travaux virtuels pour un champ de déplacement tel que  $\delta\vec{u}_A = \delta\vec{u}_B = 0$ , établir l'équation de l'équilibre statique. Choisissons maintenant un déplacement virtuel tel que le déplacement d'extrémité  $\delta\vec{u}_A \neq 0$ , puis  $\delta\vec{u}_B \neq 0$ , établir les conditions aux limites en  $A$  et  $B$ . Qu'en déduisez vous sur la configuration des réactions aux extrémités  $A$  et  $B$  du fil ?



4°) Application : Frottement d'un fil sur un cylindre

Le fil de section  $S$  enroulé sur un cylindre de rayon  $R$  sur un angle  $\alpha$  est soumis à ses extrémités à deux forces de traction  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$ .  $f$  étant le coefficient de frottement fil-cylindre, déduire des résultats précédents que le fil sera en équilibre tant que :  $|\vec{F}_B| < |\vec{F}_A| \exp(f\alpha)$ . En prenant  $F_A = 400$  N et  $f = 0,3$  combien faut-il de tours pour retenir une force  $F_B$  de 17350 N. En conservant le même nombre de tours, quelle force  $F_B$  obtient on si le coefficient de frottement diminue à 0,25.

*Rappel* : Les vecteurs  $\vec{t}$  tangent et  $\vec{n}$  normal (dirigé vers le centre de courbure) d'une courbe plane

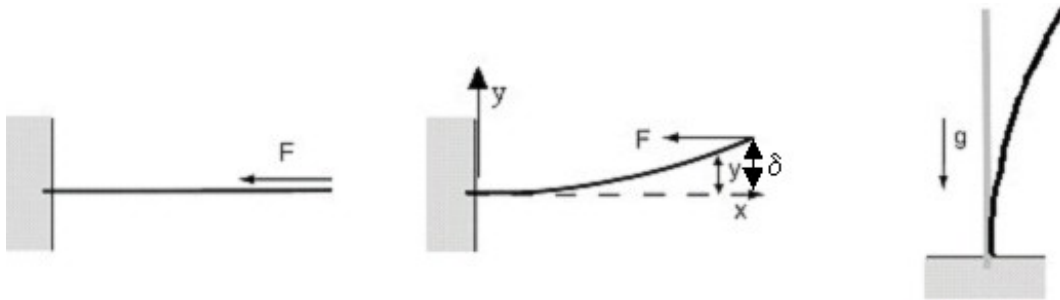
au point  $M$  d'abscisse curviligne  $s$  sont liés par la relation  $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$ .

5°) Quelle(s) application(s) pratique(s) vous suggère ce résultat ?

### Exercice au choix : Objets élancés

Les objets minces sont d'une grande utilité (de la canette au fuselage d'avion en passant par les poutres de la tour Eiffel) tant qu'ils conservent leur forme. Malheureusement, au-delà d'une compression seuil, ils flambent : ils se déforment énormément, transformant l'énergie de compression en énergie de flexion.

Une tige peut être localement courbée sur un rayon  $R$  au prix d'un moment  $M = \frac{EI}{R}$ , où  $E$  est son module de Young, et  $I$  le moment quadratique de la section droite. (pour une tige pleine à section circulaire de rayon  $r$  :  $I = \frac{\pi}{4}r^4$ ).

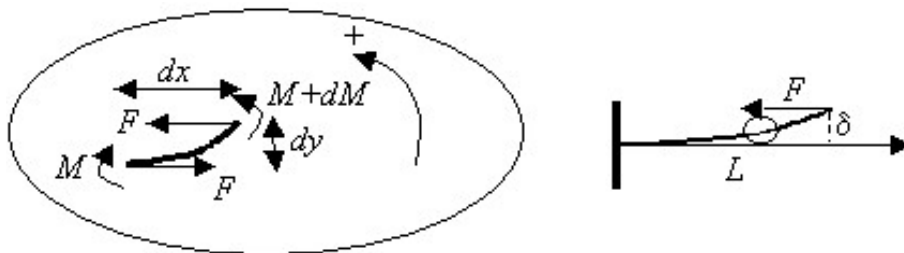


1°) Donner, par analyse dimensionnelle, l'ordre de grandeur de la force horizontale  $F_C$  capable de défléchir une tige de longueur  $L$  dans cette configuration (encastée - libre).

2°) En établissant un bilan mécanique local démontrer l'équation d'équilibre approchée de la tige :

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} + F \frac{dy}{dx} = 0$$

Quelles sont les conditions aux limites imposées ? Montrer alors l'existence d'un seuil de flambage  $F_C$  et donner sa valeur. Comparer avec le calcul du 1°).

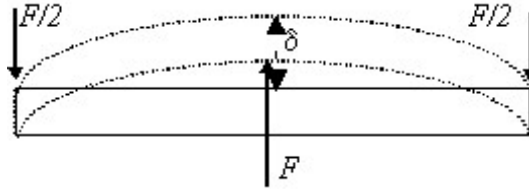


3°) Donner l'ordre de grandeur du seuil de flambage d'une tige verticale pleine à section circulaire (longueur  $L$ , masse volumique  $\rho$ , diamètre  $\phi$ ) sous son propre poids. Exprimer la loi d'échelle donnant l'élancement  $\frac{L}{\phi}$  en fonction de la hauteur  $L$  d'un arbre. (C'est le problème qui a conduit Leonhardt Euler (1707-1783) à écrire les premières équations d'équilibre des tiges). Pourquoi un grand arbre semble-t-il moins élancé qu'un arbrisseau ?

4°) D'arcy Thompson (1860-1948) remarque dans son livre *On growth and form* que, ramené à la même échelle, le squelette d'un humain est beaucoup moins élancé (plus massif) que celui d'une souris (le squelette d'une souris pèse 8% de son poids contre 18% dans le cas d'un homme), alors que celui d'une baleine est très similaire à celui d'une petite tortue marine. Pourquoi ? Expliquer pourquoi les animaux marins périssent par écrasement sous leur propre poids lorsqu'ils s'échouent sur la plage.

### Exercice au choix : *Matériaux pour ressort de suspension*

Un ressort, assimilé à une poutre mince largeur  $b$ , hauteur  $h$  et longueur  $L$  appuyée aux extrémités, supporte au centre une force  $F$  et accuse une flèche  $\delta$ .



1°) Démontrer que la flèche  $\delta$  et la contrainte maximale  $\sigma_M$  dont on précisera la localisation s'expriment par les relations :

$$\delta = \frac{FL^3}{4Ebh^3} \quad \sigma_M = \frac{3FL}{2bh^2}$$

2°) Les suspensions de véhicules poids lourds et même de certains véhicules légers nécessitent à la fois une grande flèche  $\delta$  (suspension *douce*) et une forte valeur de  $F$  (*forte charge* admissible). Est-il intéressant d'employer un matériau à fort module d'Young ? Quel est en réalité le mécanisme limitant pour un ressort de flexion et quelle est la combinaison de paramètres mécaniques pertinente ?

3°) Pour un rapport  $\frac{\sigma_e}{E}$  et une géométrie  $L, b, \delta$  fixés, établir l'expression de l'épaisseur maximale  $h_M$  de la lame ressort et en déduire la force maximale  $F_M$  qu'elle peut supporter. Les ressorts de suspension d'un camion de 20 tonnes dont l'essieu arrière supporte une charge  $P$  de 100 kN ont les caractéristiques suivantes :  $L=1\text{m}$ ,  $b=5\text{ cm}$ ,  $\delta=10\text{ cm}$ . Calculer les épaisseurs maximales  $h_M$ , les forces maximales  $F_M$  et les nombres de lames  $N_1$  et  $N_2$  (selon que l'essieu arrière est simple ou double) nécessaires à la suspension du camion pour les matériaux ci-dessous.

Matériau	$\sigma_e$ (MPa)	$E$ (GPa)	$\frac{\sigma_e}{E}$
Cuivre Béryllium	1380	120	$11,5 \cdot 10^{-3}$
Acier trempé	1300	200	$6,5 \cdot 10^{-3}$

TAB. 1 – Limite d'élasticité  $\sigma_e$  et Module d'Young  $E$

Pourquoi utilise-t-on de l'acier trempé plutôt que les alliages Cuivre-Béryllium ? Quel est l'intérêt de la trempe ?

4°) Le rapport  $\frac{\sigma_e}{E}$  du nylon vaut  $22 \cdot 10^{-3}$ , mais il ne supporte que de faibles charges. Pouvez vous citer des applications de la vie courante utilisant le nylon comme ressort ?

## Mécanique du Solide et des Matériaux Examen - Partie B - Promotion 124

### Introduction

L'énergie superficielle des solides usuels est une grandeur difficile à mesurer. Cependant, dans le cas particulier des élastomères en contact adhérent avec une aspérité de rayon de courbure  $R$ , la mesure du rayon  $a$  de l'aire de contact en fonction de la charge  $P$  appliquée permet la détermination expérimentale de l'énergie d'adhésion  $w$  et du module d'Young  $E$  de l'élastomère. Après établissement des équations de la mécanique du contact adhésif, les résultats expérimentaux permettront de caractériser l'élastomère utilisé, un caoutchouc de coefficient de Poisson  $\eta = \frac{1}{2}$ .

### Poinçonnement

En 1881 Joseph Boussinesq établit les équations de déformation d'un plan déformable de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\eta$  soumis à la force de traction  $P$  d'un cylindre rigide à face plane de rayon  $a$  en contact **adhésif** avec le plan. Le déplacement élastique  $\delta$  sous le cylindre est relié à la force de traction  $P$  par (Cf. Fig. 1) :

$$\delta = \frac{2P}{3aK} \quad \text{avec } K = \frac{4}{3} \frac{E}{1 - \eta^2}$$

La répartition de pression dans l'aire de contact adhésif de rayon  $a$  sous l'action de la charge  $P$  s'écrit :

$$p(r) = \sigma \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{r}{a})^2}} \quad \text{avec } \sigma = \frac{P}{2\pi a^2}$$

et le raccordement entre le cylindre rigide et la déformée du plan au bord de l'aire de contact adhésif est parallèle aux génératrices du cylindre .

1°) Tracer l'allure de la répartition de pression  $p(r)$ . Que devient cette pression en bord d'aire de contact ? En posant  $\rho = a - r$ , établir l'expression approchée de  $p(\rho)$  au voisinage du bord de l'aire de contact. A quoi peut-on assimiler le bord de l'aire de contact ? Ce résultat est-il compatible avec le raccordement parallèle aux génératrices du cylindre ?

2°) Dessiner l'allure de la courbe de charge  $P(\delta)$  entre  $P = 0, \delta = 0$  et  $P = P^*, \delta = \delta^*$ .

3°) Exprimer l'énergie élastique  $U^E$  accumulée dans le matériau déformable en fonction de  $\delta$ , puis de  $P$ . A quelle surface est associée  $U^E$  sur le diagramme précédent ?

4°) Calculer les quantités  $\frac{dU^E}{dP}$  et  $\frac{dU^E}{d\delta}$ . Justifier le résultat obtenu pour  $\frac{dU^E}{dP}$ . Quelle est la quantité physique qui se conserve le long de cette courbe de charge ?

### Contact de Hertz

En 1881 Heinrich Rudolph Hertz établit les équations du contact entre un corps rigide, aspérité sphérique de rayon  $R$  et un plan déformable de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\eta$ . Ce contact, ponctuel en l'absence de charge appliquée, présente un rayon de contact  $a$  et un enfoncement  $\delta$  reliés par (Cf. Fig. 1) :

$$a^3 = \frac{PR}{K} \quad \delta = \frac{a^2}{R} \quad \text{avec } K = \frac{4}{3} \frac{E}{1 - \eta^2}$$

La répartition de pression dans l'aire de contact de rayon  $a$  sous l'action de la charge  $P$  s'écrit :

$$p(r) = \frac{3P}{2\pi a^2} \sqrt{1 - (\frac{r}{a})^2}$$

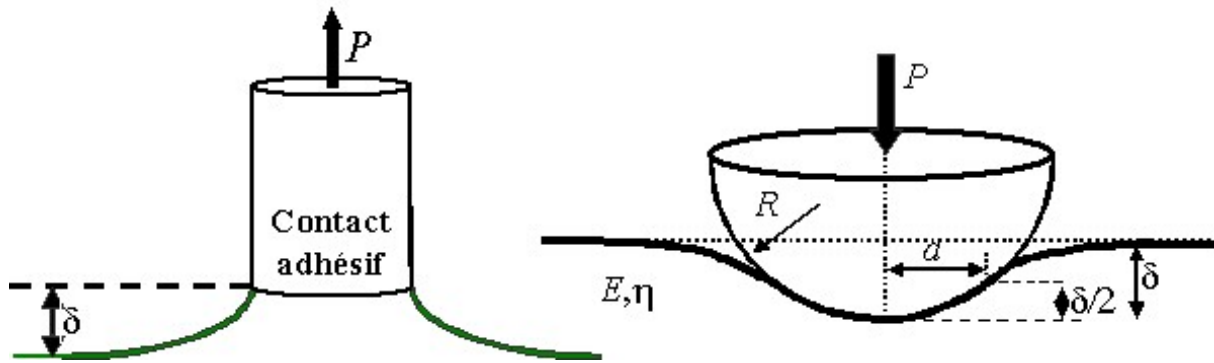


FIG. 1 – A gauche : Poinçonnement - A droite : Contact de Hertz

et le raccordement entre l'aspérité rigide et la déformée du plan est tangent en bord d'aire de contact.

1°) Tracer l'allure de la répartition de pression  $p(r)$ . Que devient cette pression en bord d'aire de contact ? Ce résultat est-il compatible avec le raccordement tangent ?

2°) Établir la relation liant  $P$  et  $\delta$ . Dessiner l'allure de la courbe de charge  $P(\delta)$  entre  $P = 0, \delta = 0$  et  $P = P^*, \delta = \delta^*$ . Pouvez vous justifier le caractère non linéaire de la courbe de charge ?

3°) Exprimer l'énergie élastique  $U^E$  accumulée dans le contact en fonction de  $\delta$ , de  $P$  puis de  $a$  et démontrer que  $U^E$  s'écrit aussi  $\frac{2}{5}P\delta$ . A quelle surface est associée  $U^E$  sur le diagramme précédent ? Calculer  $\frac{dU^E}{dP}$  et  $\frac{dU^E}{d\delta}$ . Que traduit le résultat obtenu pour  $\frac{dU^E}{dP}$  ? Quelle est la valeur du potentiel complémentaire  $\omega$  ? En déduire la valeur de  $\frac{d\omega}{dP}$

4°) Déterminer la valeur de la pente  $\frac{dU^E}{dP}$  au point  $P = P^*$  ainsi que les valeurs de  $\delta$  et de  $P$  aux points d'intersection avec les axes  $P$  et  $\delta$ . Quelle est la quantité physique qui se conserve le long de cette tangente ?

5°) Calculer le rayon  $a$  de l'aire de contact et l'enfoncement  $\delta$  résultant du contact d'une sphère rigide de rayon  $R = 2,19$  mm pressée sous l'action de la force  $P = 20$  mN sur un massif plan d'élastomère (coefficient de Poisson  $\eta = 0,5$  et module d'Young  $E = 5$  MPa).

### Forces d'adhésion

Pour les faibles charges de contact de Hertz,  $P \rightarrow 0$ , on constate expérimentalement, sur des matériaux lisses à faible module d'Young comme les élastomères, que le rayon  $a$  de la surface de contact ne tend pas vers zéro, mais plutôt vers une valeur finie  $a_P = a(P = 0)$  et que le raccordement en bord d'aire de contact s'effectue selon un cylindre d'axe vertical (Cf. Fig. 2).

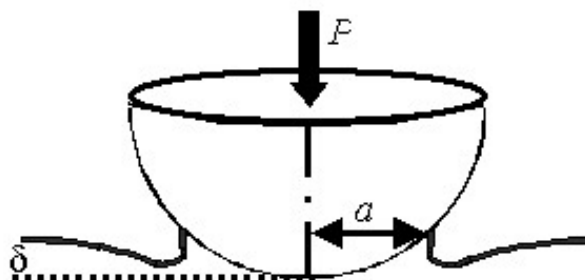


FIG. 2 – Contact de Hertz adhésif

1°) A quoi peut-on assimiler le bord de l'aire de contact ? Que peut-on dire de la pression en bord

d'aire de contact ?

2°) Les relations entre  $P$ ,  $a$  et  $\delta$  ne vérifient plus les relations de Hertz et font intervenir l'énergie superficielle de Dupré  $w$  résultant des forces d'attraction moléculaire faibles (Van der Waals) dont la portée est limitée à quelques dizaines de nm. Pourquoi cet effet est-il masqué lors de contact entre solides ordinaires alors qu'il est intense avec les élastomères ?

3°) En présence de force d'adhésion ( $w \neq 0$ ), notons  $\delta$  l'enfoncement et  $a$  le rayon d'aire de contact obtenus sous l'action de la charge effective  $P$ . En notant  $P_H$  la force à appliquer et  $\delta_H$  l'enfoncement résultant en l'absence de force d'adhésion ( $w = 0$ ) conduisant au même rayon  $a$  d'aire de contact, tracer le trajet de charge permettant d'obtenir l'état final comme superposition d'un contact de Hertz sous  $P_H$  suivi d'un poinçonnement sous l'action de la force de traction  $P_H - P$ .

4°) A partir des résultats obtenus précédemment, démontrer que l'enfoncement  $\delta$  et l'énergie élastique stockée  $U^E$  en présence de force d'adhésion s'écrivent :

$$\delta = \frac{a^2}{3R} + \frac{2P}{3Ka} \quad U^E = \frac{Ka^5}{15R^2} + \frac{P^2}{3Ka}$$

5°)  $U^S$  désignant l'énergie de séparation, justifier l'approximation  $U^S = \pi a^2 w$

6°) En notant  $U^P = -P\delta$  le potentiel de la force  $P$ , exprimer  $U^P$  en fonction de  $P, a, R, K$  puis établir l'expression de l'énergie mécanique  $U^M = U^P + U^E$  du contact adhésif.

7°) Lorsque l'aire adhérente  $S$  varie, montrer que l'aire  $A$  de la surface de la fissure annulaire ainsi créée varie comme  $dA = -dS$ . Démontrer que le taux de restitution d'énergie  $G$  est égal à :

$$G = \frac{(P_H - P)^2}{6\pi R P_H} = \frac{(P_H - P)^2}{6\pi K a^3}$$

8°) En déduire la relation liant le rayon  $a$  d'équilibre de la surface adhérente sous la forme d'une équation liant la charge  $P$  appliquée et la charge équivalente  $P_H$  du contact de Hertz non adhésif de même aire, puis ses solutions  $P_H = f(P)$ . Montrer que l'équilibre *stable* impose  $P_H > P$ . En déduire les relations d'équilibre *stable*  $P_H = f(P)$  et  $a = f(P)$ .

9°) Établir les expressions :

$$P_C = -\frac{3}{2}\pi R w \quad \Rightarrow \quad a_c = \sqrt[3]{\frac{3\pi R^2 w}{2K}}$$

de la force de traction critique  $P_C$  et du rayon critique d'aire de contact  $a_C$  que peut supporter un contact adhésif.

Ainsi que l'expression :

$$a_P = \sqrt[3]{\frac{6\pi R^2 w}{K}}$$

du rayon  $a_P$  de la surface de contact en l'absence de chargement  $P = 0$ .

### Énergie d'adhésion et Module d'Young

L'évolution, en fonction de la charge  $P$  appliquée, du rayon  $a$  de l'aire de contact entre une sphère rigide de rayon  $R = 2,19$  mm appuyée sur une surface plane de caoutchouc naturel (Module d'Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\eta = 0,5$ , énergie d'adhésion  $w$  mesurée sur l'appareil ci-dessous (Cf. Fig. 3) a fourni le résultat expérimental de la figure 4.

1°) Déterminer les valeurs du module d'Young  $E$  en GPa et de l'énergie d'adhésion de Dupré  $w$  en  $\text{mJ}\cdot\text{m}^{-2}$  du caoutchouc utilisé.

*Indication* : Pour retrouver la relation linéaire entre  $Pa^{-3/2}$  et  $a^{3/2}$ , il est conseillé de repartir directement de l'expression de  $G$  sous la forme :

$$G = \frac{(P_H - P)^2}{6\pi K a^3} \quad \text{avec} \quad P_H = \frac{K a^3}{R}$$

2°) Calculer la valeur  $a_P$  associée et comparer avec le résultat expérimental.

3°) Calculer la charge de traction critique  $P_C$ , le rayon de l'aire de contact  $a_C$  correspond ainsi que les quantités  $P_C a_C^{-3/2}$  et  $a_C^{3/2}$ . A quel point de la courbe expérimentale correspond cet état critique? Est-il possible de trouver des points expérimentaux en dessous de ce point? que se passe-t-il expérimentalement en ce point?

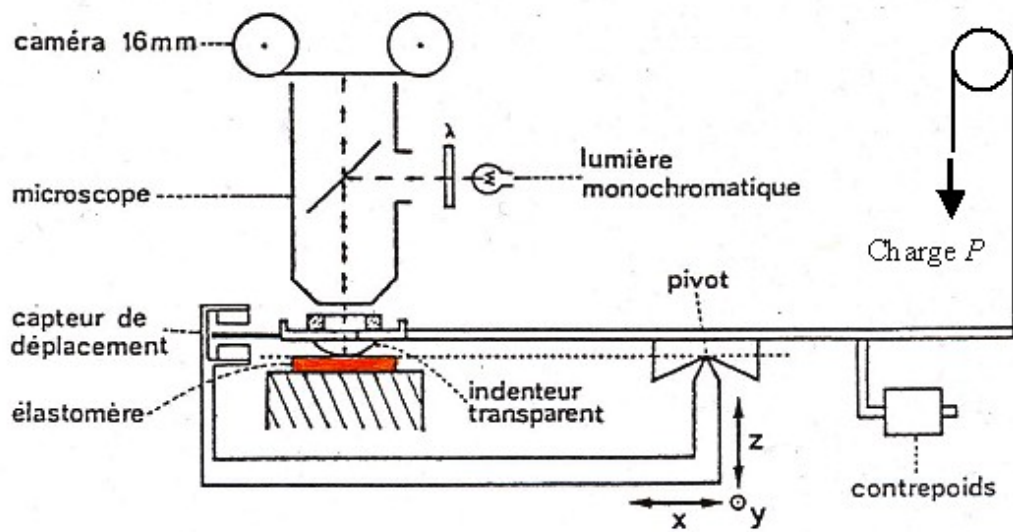


FIG. 3 – Appareillage de mesure



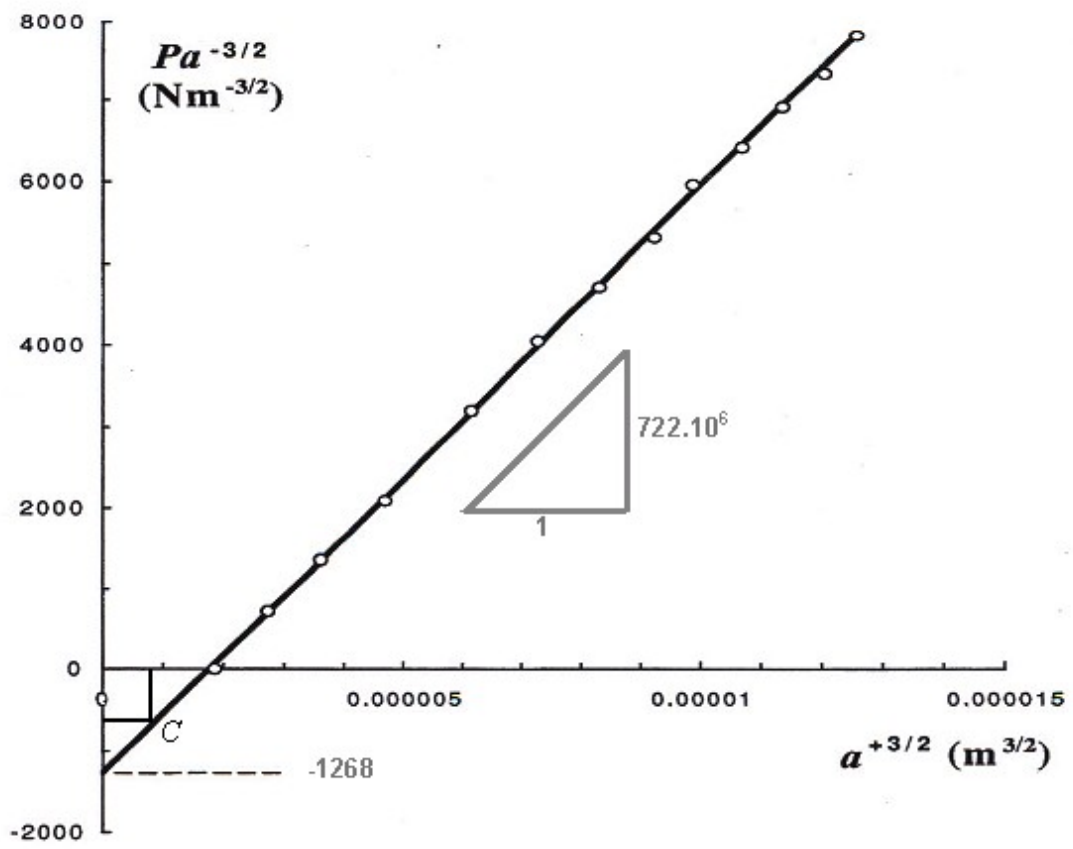


FIG. 4 – Résultat expérimental