

**Mécanique du Solide et des Matériaux**  
**Examen du Mercredi 20 février 2008 : 8h45-11h45 Promotion 125**

**Avertissement**

La plupart des résultats étant donnés dans les énoncés, la notation tiendra compte de la qualité des justifications et des arguments développés pour les établir.

**Partie A** Écrivez lisiblement votre nom sur chaque copie

La durée de l'épreuve partie A est de 1h. Les copies de la partie A seront ramassées à la fin de ce délai.

Tous les documents sont autorisés sauf les ouvrages et les photocopies d'ouvrages.

La partie A se compose d'un exercice obligatoire et d'un exercice à choisir parmi deux selon le tableau suivant :

Exercice 1	<b>obligatoire</b>	40 mn	5 points	Torsion d'un arbre de transmission
Exercice 2	<i>au choix</i>	20 mn	3 points	Force dans un arc de maçonnerie en compression
Exercice 3	<i>au choix</i>	20 mn	3 points	Flexion-Torsion, Mesure du rapport $\frac{E}{G}$

**Partie B** Écrivez lisiblement votre nom sur chaque copie

La durée normale de l'épreuve partie B est de 1h45, sa durée maximale de 2h. Les copies seront ramassées au plus tard 2h après le début de l'épreuve.

Tous les documents sont autorisés sauf les ouvrages et les photocopies d'ouvrages.

La partie B se compose d'un problème en 2 parties **obligatoires**.

Partie 1	<b>obligatoire</b>	45 mn	6 points	Contact parfaitement élastique
Partie 2	<b>obligatoire</b>	60 mn	6 points	Contact élastique avec pertes en volume

**Indications et Conseils**

Lisez *complètement* les énoncés.

Ne vous bloquez pas sur une question, les résultats principaux sont donnés dans l'énoncé afin que vous puissiez *continuer*.

**Mécanique du Solide et des Matériaux**  
**Examen - Partie A - Promotion 125**

**Exercice obligatoire : Torsion d'un arbre de transmission**

Un arbre cylindrique, tournant à la vitesse angulaire  $\omega$ , est destiné à transmettre une puissance  $\mathcal{P}$ .

1°) Déterminer les expressions de l'angle de torsion par unité de longueur  $\alpha$  et de la contrainte de cisaillement maximale  $\tau_M$  en fonction de  $\mathcal{P}$  et  $\omega$ .

*Rappel* : Dans une section droite la contrainte circonférentielle de cisaillement varie selon la loi  $\tau = G\alpha r$ .

2°) La contrainte de cisaillement ne doit pas excéder la valeur admissible  $\tau_C$  et l'angle de torsion par unité de longueur ne doit pas excéder la valeur admissible  $\alpha_C$ . Établir les critères à respecter pour le choix du rayon de l'arbre.

3°) Montrer que ces critères peuvent s'écrire sous la forme réduite :

$$\frac{R}{R_C} \geq \left(\frac{\mathcal{P}}{\omega}\right)^{1/3} \quad \frac{R}{R_C} \geq \left(\frac{\mathcal{P}}{\omega}\right)^{1/4}$$

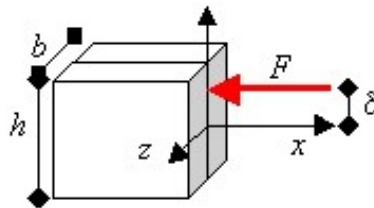
$R_C$  et  $\frac{\mathcal{P}}{\omega}|_C$  étant respectivement le rayon critique et la valeur critique du rapport  $\frac{\mathcal{P}}{\omega}$  dont on établira les expressions.

Représenter graphiquement, en fonction du rapport  $\frac{\mathcal{P}}{\omega}$ , l'allure du domaine des valeurs de rayon  $\frac{R}{R_C}$  admissibles.

4°) Quel est le critère pertinent (contrainte admissible ou déformation admissible) selon la puissance  $\mathcal{P}$  à transmettre à la vitesse de rotation  $\omega$  ?

**Exercice au choix : Force dans un arc de maçonnerie en compression**

Un arc en maçonnerie constitué de blocs de pierre de section droite rectangulaire (hauteur  $h$ , largeur  $b$ ) a pour fonction de transmettre un effort équivalent à une force résultante longitudinale mais désaxée par rapport au centre de sa section.



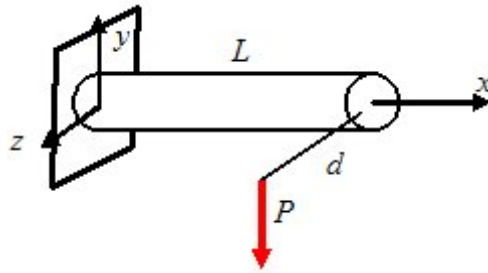
1°) Montrer que la force désaxée  $F$  est équivalente à une force axiale  $X$  appliquée au centre de la section droite et à un moment fléchissant  $M$  dont on donnera les expressions.

2°) Sachant que la contrainte normale de flexion s'écrit  $\sigma = -\frac{M}{I}y$  (avec  $I = \frac{bh^3}{12}$  pour une section rectangulaire), déterminer l'expression de la contrainte normale  $\sigma(y)$  induite par la force désaxée  $F$  dans la section droite et dessiner l'allure de son évolution.

3°) Quelle est la condition de stabilité de l'arc en compression ? Que pensez vous de la règle de construction : "la ligne de poussée doit rester dans le tiers médian" ?

**Exercice au choix : Flexion-Torsion, Mesure du rapport  $\frac{E}{G}$**

Pour déterminer expérimentalement le rapport entre le module d'Young  $E$  et le module de cisaillement  $G$  d'un matériau, Kirchoff a utilisé le dispositif ci-dessous :



Une tige cylindrique mince de longueur  $L$ , encastée à une extrémité, est sollicitée en torsion-flexion par l'action d'une charge  $P$  excentrée à la distance  $d$  du centre de sa section droite terminale.

1°) Déterminer l'angle de torsion  $\psi$  et l'angle d'inclinaison  $\varphi$  de l'extrémité de la tige. On notera  $I_T$  le moment quadratique de torsion et  $I_F$  le moment quadratique de flexion. Pour une tige cylindrique, ces deux quantités sont liées par la relation  $I_T = 2I_F$ .

*Rappels :*

- Equation différentielle de la torsion :  $GI_T \frac{d\psi}{dx} = C$ ,  $C$  couple de torsion.
- Equation différentielle de la flexion :  $EI_F \frac{d^2y}{dx^2} = -M$ ,  $M$  moment fléchissant.

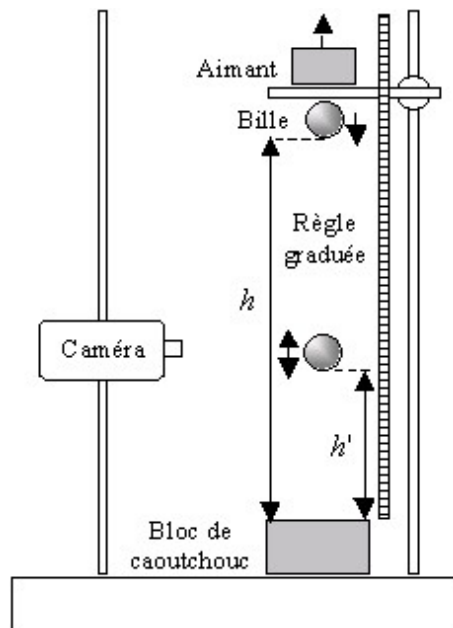
2°) Ces deux angles sont aisément mesurés en observant le déplacement d'un rayon lumineux réfléchi par un petit miroir collé sur la tige, à son extrémité. En écrivant l'expression du rapport de ces deux angles, montrez que l'on dispose ainsi d'une méthode permettant d'obtenir directement le rapport des modules d'élasticité  $E$  et  $G$ . Établir l'expression de ce rapport.

## Mécanique du Solide et des Matériaux

### Examen - Partie B - Promotion 125

#### Introduction

Lorsqu'une bille rigide, de rayon de courbure  $R$ , rebondit sur la surface adhésive (énergie d'adhésion par unité de surface  $w$ ) d'un bloc à surface plane en élastomère (Module d'Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\eta$ ) présentant des pertes par dissipation visqueuse en volume et en surface, on constate l'existence d'une hauteur de lâcher critique  $h_C$  en deçà de laquelle la bille reste *collée* sur le bloc. Après établissement des équations de la mécanique du contact adhésif, les résultats expérimentaux permettront de caractériser le coefficient de restitution d'énergie  $\alpha_0$  caractérisant les pertes visco-élastiques en volume et l'exposant  $n$  de la fonction de perte visco-élastique superficielle.



N° bille	1	2	3	4	5	6
Rayon (mm)	1	1,5	2	3	4	5
masse (g)	0,033	0,112	0,262	0,876	2,092	4,077
N° projectile	1	2	3	4		
Rayon (mm)	2	2	1,5	3		
masse (g)	0,173	0,327	0,262	0,262		

TAB. 1 – Billes et projectiles utilisées dans l'expérience

#### Partie I : Contact de Hertz

En 1881 Heinrich Rudolph Hertz établit les équations du contact entre corps déformables. Dans le cas du contact entre une bille rigide de rayon  $R$  et un massif plan d'élastomère de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\eta$  en régime de déformation élastique linéaire, le contact, sous la charge  $P$  appliquée, présente un rayon de contact  $a$  et un enfoncement  $\delta$  reliés par :

$$a^3 = \frac{PR}{K} \quad \delta = \frac{a^2}{R} \quad \text{avec } K = \frac{4}{3} \left( \frac{E}{1 - \eta^2} \right)$$

1°) Établir l'expression de l'énergie élastique  $U^E$  accumulée dans le contact en fonction de l'enfoncement  $\delta$ .

2°) La bille étant lâchée d'une hauteur  $h$ , donner l'expression de sa vitesse d'impact  $V$  en fonction de  $h$ , puis, en écrivant le bilan énergétique de la pénétration, établir l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2gh} \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 + \frac{2K\sqrt{R}}{5mgh} \delta^{5/2} = 1$$

de la loi horaire d'enfoncement  $\delta(t)$ .

3°) Établir les expressions de la pénétration maximale  $\delta_M$  et du rayon  $a_M$  de l'aire de contact associée en fonction de  $h$  et les mettre sous la forme :

$$\delta_M = K_\delta h^{\frac{2}{5}} \quad a_M = K_a h^{\frac{1}{5}}$$

en donnant l'expression du coefficient  $K_\delta$  puis celle du coefficient  $K_a$  que l'on exprimera en fonction de  $K_\delta$  et  $R$ .

4°) Établir l'expression du temps de pénétration  $\tau$  en fonction de  $\delta_M$  et de  $V$  sachant que  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{5/2}}} = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(2/5)}{5\Gamma(9/10)} = 1,47$ , puis le mettre sous la forme :

$$\tau = K_\tau h^{-\frac{1}{10}}$$

en donnant l'expression du coefficient  $K_\tau$  en fonction de  $K_\delta$  et  $g$ .

5°) Calculer, en grammes, la masse  $m$  de la bille d'acier (masse volumique  $\rho=7800 \text{ kg.m}^{-3}$ , rayon  $R=4 \text{ mm}$ ) et le module  $K$  du massif d'élastomère (caoutchouc naturel de module d'Young  $E= 0,89 \text{ MPa}$  et de coefficient de Poisson  $\eta=0,5$ ).

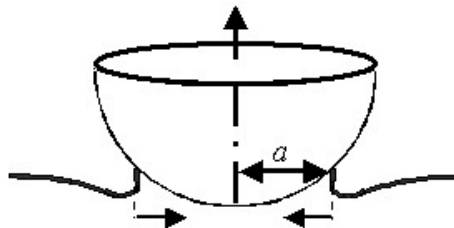
Avec  $g=9,81 \text{ m.s}^{-2}$ , calculer les valeurs de  $V$  vitesse d'impact,  $\delta_M$  pénétration,  $a_M$  rayon d'aire de contact et  $\tau$  temps de pénétration pour la bille de rayon  $R=4 \text{ mm}$  tombant d'une hauteur  $h=1 \text{ m}$  sur la surface plane du bloc en caoutchouc naturel.

6°) La surface du caoutchouc étant saupoudrée de talc afin d'écranter les effets d'adhésion, l'expérience fournit la relation linéaire  $h' = \alpha_0 h$  quel que soit le projectile utilisé.  $h$  désigne la hauteur de lâcher et  $h'$  la hauteur de rebond. Cette relation traduit les pertes par dissipation visqueuse dans le volume du caoutchouc et fournit la valeur de la résilience  $\alpha_0 = \frac{h'}{h}$ . En déduire, en fonction de  $h$  et  $\alpha_0$  l'énergie mécanique  $U^M$  disponible pour le rebond suivant.

## Partie II : Contact adhésif

Durant la phase d'éjection, les forces d'adhésion qui se sont établies durant la phase de pénétration provoquent un décollement de la bille dont le rayon d'aire de contact passe progressivement de  $a_M$  à 0.

A ce décollement est associée dans les élastomères une perte d'énergie visqueuse localisée en bordure



de l'anneau de décollement, perte d'énergie par unité de surface décollée qui s'écrit :

$$kw \left( \frac{da}{dt} \right)^n$$

où  $w$  (énergie d'adhésion par unité de surface collée),  $n$  (exposant) et  $k \gg 1$  (préfacteur de la fonction de perte,  $k = 1440 \text{ m}^{-n} \cdot \text{s}^n$  pour le caoutchouc à température ambiante) sont des caractéristiques de l'élastomère.

1°) Donner l'expression complète  $U^S$  de l'énergie perdue au cours du décollement, puis son expression simplifiée.

2°) Dans la suite, pour ne pas alourdir les calculs, on négligera les corrections à apporter aux quantités  $\delta_M, a_M$  et  $\tau$  du fait de l'existence des pertes en volume et on utilisera les valeurs obtenues dans le cas du contact de Hertz non adhésif sans pertes. L'erreur commise ne portant que sur les préfacteurs des lois de puissance en  $h$ , elle ne remet pas en cause la validité de la détermination de l'exposant  $n$  du caoutchouc.

La cinétique de décollement, trop rapide pour être observée expérimentalement avec des moyens usuels, sera assimilée à un décollement à vitesse constante  $V_D$ . Déterminer l'expression de cette vitesse de décollement en fonction de  $a_M$  et  $\tau$  et démontrer que l'énergie dissipée en surface  $U^S$  s'écrit en fonction de la hauteur de lâcher  $h$  sous la forme :

$$U^S = \Gamma h^{\frac{4+3n}{10}}$$

où  $\Gamma$  est un préfacteur que l'on explicitera en fonction de  $k, w, K_a, K_\tau$  et  $n$ .

3°) En écrivant le bilan d'éjection tenant compte à la fois des pertes en volume et en bord de décollement, établir l'expression de la hauteur de lâcher critique  $h_C$  en dessous de laquelle la bille reste collée et ne rebondit plus est donnée par :

$$h_C = \left( \frac{\Gamma}{mg\alpha_0} \right)^{\frac{10}{6-3n}}$$

4°) Lorsque  $h > h_C$  écrire à nouveau le bilan énergétique. En déduire, en analysant le résultat expérimental de la figure 1, l'exposant  $n$  du caoutchouc et la valeur de la résilience  $\alpha_0$ .

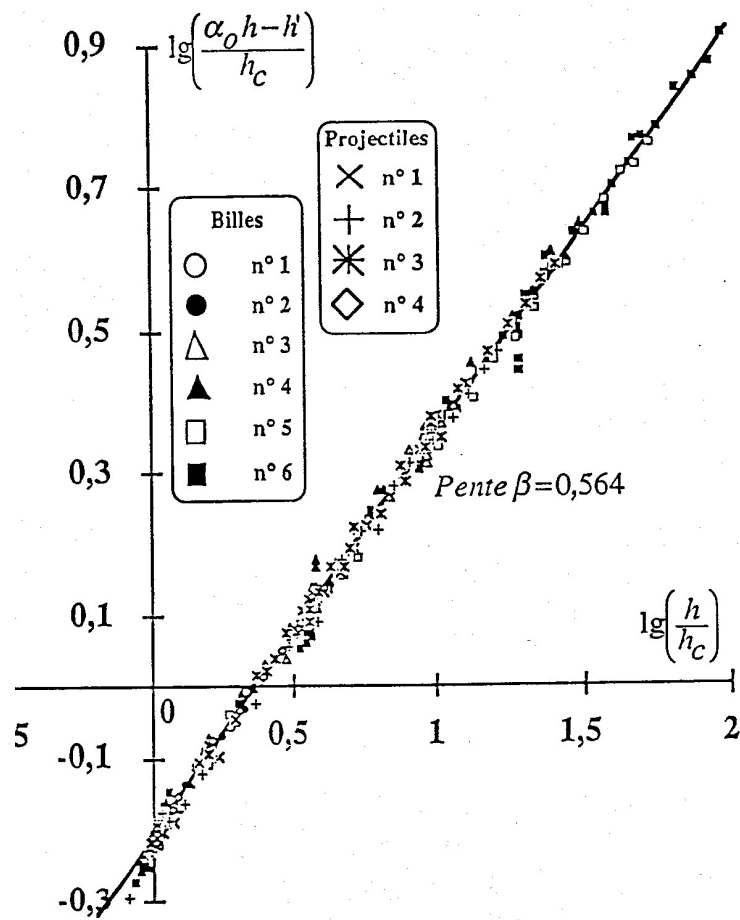


FIG. 1 – Courbe maîtresse regroupant les résultats obtenus expérimentalement avec l'ensemble des projectiles.