

Mécanique du Solide et des Matériaux
Examen du Vendredi 13 février 2009 : 8h30-11h30 Promotion 126

Avertissement

Les **résultats principaux étant donnés dans les énoncés**, la notation tiendra compte de la qualité des justifications et des arguments développés pour les établir.

Partie A Écrivez lisiblement votre nom sur chaque copie

La durée de l'épreuve partie A est de **50 mn**. Les copies de la partie A seront ramassées à la fin de ce délai.

Aucun document n'est autorisé.

La partie A se compose de deux exercices obligatoires selon le tableau suivant :

Exercice 1	obligatoire	20 mn	3 points	Emmanchement soudé
Exercice 2	obligatoire	30 mn	4 points	Emmanchement en force

Partie B Écrivez lisiblement votre nom sur chaque copie

La durée de l'épreuve partie B est de **2h10**

Aucun document n'est autorisé.

La partie B intitulée "La balle de ping-pong" se compose d'un problème en 3 parties **toutes obligatoires** .

Partie 1	obligatoire	60 mn	5 points	Frappe faible
Partie 2	obligatoire	20 mn	3 points	Frappe modérée
Partie 2	obligatoire	50 mn	5 points	Frappe forte

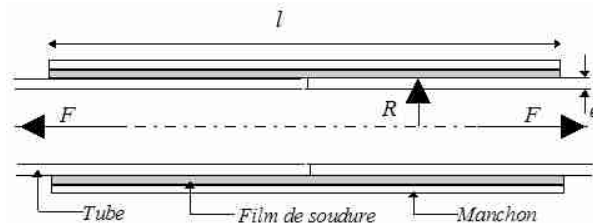
Lisez *complètement* les énoncés.

Mécanique du Solide et des Matériaux
Examen - Partie A - Promotion 126

Exercice 1 obligatoire : Emmanchement soudé

La jonction des canalisations intérieures d'adduction d'eau s'effectue par soudage d'un manchon en cuivre (longueur l , rayon intérieur R) emboîté sur les tuyaux de cuivre (rayon extérieur R , épaisseur e) de faible épaisseur ($\frac{e}{R} \ll 1$). L'alliage de soudure à base d'étain pénètre par capillarité lors de l'opération de soudage et forme en se refroidissant un joint de soudure de très faible épaisseur. Afin de garantir la survie de la canalisation en cas de coup de bélier, le joint est calculé de sorte qu'il cède avant endommagement irréversible de la canalisation.

Note : Le coup de bélier est une onde de forte amplitude générée par une instabilité due à l'usure des clapets de robinetterie. Cette onde parcourt la canalisation émettant un bruit caractéristique à chaque réflexion sur les coudes et les clapets générant une forte traction dans les tubes.



1°) Par quel mécanisme le joint de soudure cède-t-il? Avec R_{Sn} limite de résistance en **traction** de l'alliage de soudure, établir la relation entre la longueur l du manchon et la force F lorsque le joint de soudure cède.

2°) Avec R_{Cu} limite de résistance en traction du Cuivre, déterminer la longueur l_{max} maximale autorisée pour le manchon et la force F_{max} admissible.

3°) Les tubes de cuivre employés en plomberie, caractérisés par leur diamètres intérieur et extérieur exprimés en mm, forment une série normalisée 8/10 10/12 12/14 14/16 \dots . Sachant que $R_{Cu}=120$ Mpa et $R_{Sn}=10$ Mpa calculer la valeur l_{max} de la longueur du manchon et justifier pourquoi, quel que soit leur diamètre, les manchons de plomberie ont tous une même longueur de l'ordre de 40 mm.

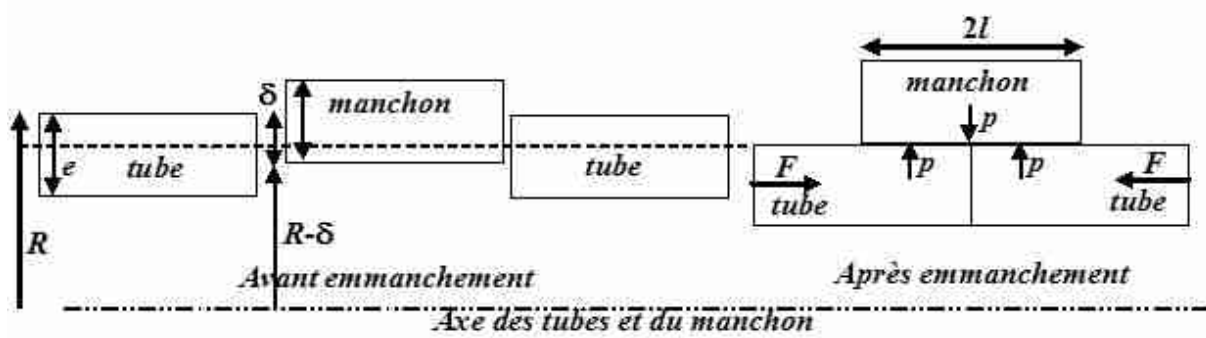
Exercice 2 obligatoire : Emmanchement en force

Deux tubes en acier (Module d'Young $E=200$ GPa, limite de résistance en traction et en compression $\sigma_P=400$ Mpa, coefficient de frottement acier sur acier $\mu=0,5$) de longueur L , de rayon extérieur $R=50$ mm et d'épaisseur $e=1$ mm petite devant R (tube à paroi mince) sont rabotés en emboîtant de force un manchon du même acier de longueur totale $2l$, d'épaisseur e et de rayon intérieur $R - \delta$ avec δ petit devant R . On cherche à déterminer la force de compression F nécessaire à l'emmanchement.

1°) Pour y parvenir il faut d'abord résoudre le problème auxiliaire suivant : Un tube d'acier de rayon r et d'épaisseur e petite devant r est soumis à une pression intérieure p . Établir la relation qui lie la contrainte de traction circonférentielle σ qui règne dans l'épaisseur du tube en fonction de la pression p et des caractéristiques géométriques du tube et en déduire la variation de rayon induite par p :

$$dr = \frac{p}{E} \frac{r^2}{e}$$

2°) Etablir les expressions de p , σ et F (force d'emmanchement) en fonction des caractéristiques géométriques et mécaniques des tubes et du manchon après emboîtement.



3°) Quelle charge maximale de traction F_T peut soutenir un tel assemblage ?

4°) En prenant en compte la limite de résistance σ_P de l'acier :

- Déterminer la force d'emmanchement maximale admissible F_{max} , puis la valeur du produit $(\delta l)_{max}$.
- Déterminer ensuite l'écart de rayon δ_{max} admissible.

A quelle demi-longueur d'emmanchement l_{min} correspond-t-il ?

5°) Lorsque la longueur L des tubes à emmancher devient grande devant leur rayon R , les tubes comprimés manifestent une instabilité de flambement au delà de la force critique $F_C = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, le moment d'inertie de flexion d'un tube creux en paroi mince étant $I = \pi R^3 e$, et se courbent. Déterminer la longueur L_{max} maximale admissible pour utiliser la méthode d'emmanchement en force.

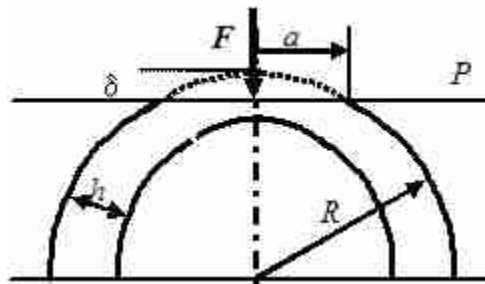
Mécanique du Solide et des Matériaux
Examen - Partie B - Promotion 126

La balle de ping-pong

Lors de la frappe d'une balle de ping-pong cette dernière s'écrase sur la raquette ou sur la table lors de son rebond. Si la frappe est très violente, on constate que la balle présente un renversement de sa courbure dans la zone de contact dont la bordure est matérialisée par un pli très marqué. Nous analyserons les différents régimes de contact en fonction de la force de frappe, sans chercher à calculer de manière exacte les profils déformés associés. On supposera que *la raquette et la table sont des plans indéformables*.

Pour fixer les valeurs numériques de ces ordres de grandeur, on considère une balle de ping-pong de rayon $R=2$ cm, d'épaisseur de coque $h=500$ μm , de module d'Young $E=1$ GPa et de masse $m=3$ g.

Partie I : Frappe Faible



1°) Déterminer puis calculer le volume V_M , la masse volumique ρ du matériau constituant la balle de ping-pong et la vitesse du son $c \approx \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ au sein du matériau.

Dans toute la suite on utilisera des ordres de grandeur, tous les préfacteurs, constantes multiplicatives sans dimension, seront pris égaux à l'unité.

2°) Etablir la relation $R\delta \sim a^2$ entre le rayon a de l'aire du disque de contact et l'écrasement $\delta \ll R$ sur le plan rigide P .

3°) En estimant les ordres de grandeurs de la contrainte σ et de la déformation ε dans la zone **locale** du contact de dimension caractéristique $\ll h$, déduire l'ordre de grandeur de la force $F \sim E \frac{a^3}{R}$ qu'il faut exercer pour réaliser l'écrasement δ de la sphère. En déduire l'évolution de F avec δ .

4°) Déduire de l'expression de F l'ordre de grandeur de l'énergie élastique stockée U en fonction de F, δ .

Sachant que la densité volumique d'énergie élastique est donnée par $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$, V_C étant le volume dans lequel les déformations élastiques sont appréciables établir une estimation de U fonction de F, a, δ, V_C et déduire de la comparaison de ces deux expressions l'ordre de grandeur de la profondeur e sur laquelle les déformations sont appréciables sous l'aire de contact.

5°) On applique maintenant ce calcul statique au rebond sur la table d'une balle possédant une vitesse incidente V . Estimer l'écrasement maximal δ_{max} au cours du rebond en raisonnant sur la conservation de l'énergie. En déduire un ordre de grandeur du temps de contact τ en fonction de R, h, V et d'une vitesse caractéristique dont on précisera la signification physique. Sous quelle hypothèse cette estimation est-elle valide? Calculer δ_{max} et τ pour une balle de ping-pong impactant à une vitesse $V=10$ $\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$. L'estimation est-elle valide dans ce cas?

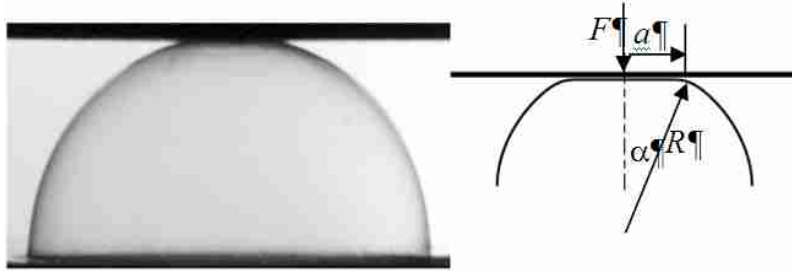
6°) Au vu des résultats ci-dessus, montrer que le régime $F = f(\delta)$ obtenu est valide jusqu'à la valeur limite $\delta_H = \frac{h^2}{R}$ de l'écrasement. Donner la valeur numérique de δ_H . Ce régime est-il observable

expérimentalement ?

Partie II : Frappe modérée

Au delà de l'écrasement δ_H , h devient une longueur supplémentaire à prendre en compte dans le problème et le calcul de l'énergie élastique stockée doit être modifié en conséquence.

La calotte sphérique écrasée voit sa courbure passer de la valeur initiale $\kappa_0 = \frac{1}{R}$ à la valeur finale $\kappa = 0$ stockant une énergie de courbure U_κ . Dans le même temps la longueur d'arc de la calotte diminue jusqu'à prendre la valeur $2a$ diamètre de la zone de contact. Il lui correspond une énergie de compression U_C .



1°) Donner l'expression de la déformation de contraction ε_C de l'arc de calotte. Sachant que la densité volumique d'énergie élastique est donnée par $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ déduire l'expression :

$$U_C \sim Eh \frac{\delta^3}{R}$$

de l'énergie élastique de compression U_C contenue dans la région de contact.

2°) Sachant que la densité **surfactive** d'énergie de courbure est donnée par $Eh^3\Delta\kappa^2$, en déduire l'expression :

$$U_\kappa \sim E\delta \frac{h^3}{R}$$

de l'énergie de courbure contenue dans la région de contact.

3°) Déterminer l'écrasement δ_L pour lequel ces deux énergies ont le même ordre de grandeur. Établir l'expression de la loi $F = f(\delta)$ dans l'intervalle d'écrasement $\{\delta_H, \delta_L\}$.

4°) Verifier que l'on retrouve bien l'énergie calculée en première partie lorsque δ tend vers sa borne inférieure δ_H .

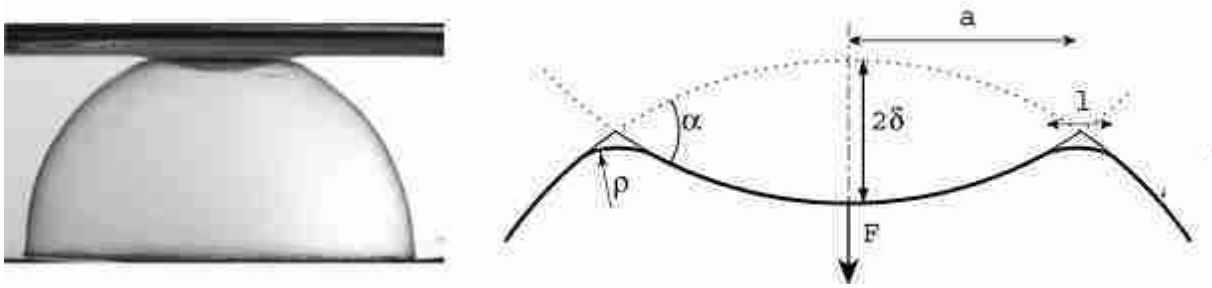
Partie III : Frappe forte

1°) On s'intéresse maintenant au régime où l'on frappe fortement sur la balle, $\delta \gg h$. En reprenant les estimations précédentes, laquelle des énergies de compression et de courbure de la calotte devient prépondérante.

2°) l'expérience montre que la solution précédente avec un disque de contact devient instable (voir photo ci-après). La zone de contact flambe et la calotte se retourne vers l'intérieur en conservant sa courbure à l'exception d'un pli annulaire de largeur l où se trouve localisée l'énergie élastique. Que deviennent alors les énergies de compression et de courbure de la calotte.

3°) On cherche à déterminer la taille l inconnue de ce pli. Établir les estimations géométriques suivantes de l'angle α , du rayon de courbure ρ et de la déformation ε du pli :

$$\alpha \sim \left(\frac{\delta}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \rho \sim l \left(\frac{R}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \varepsilon \sim \alpha^2$$



En déduire l'énergie totale (extension et courbure) stockée dans le pli circulaire en fonction de l'inconnue l , puis établir l'expression suivante de l et vérifier que l est toujours compris entre h et R .

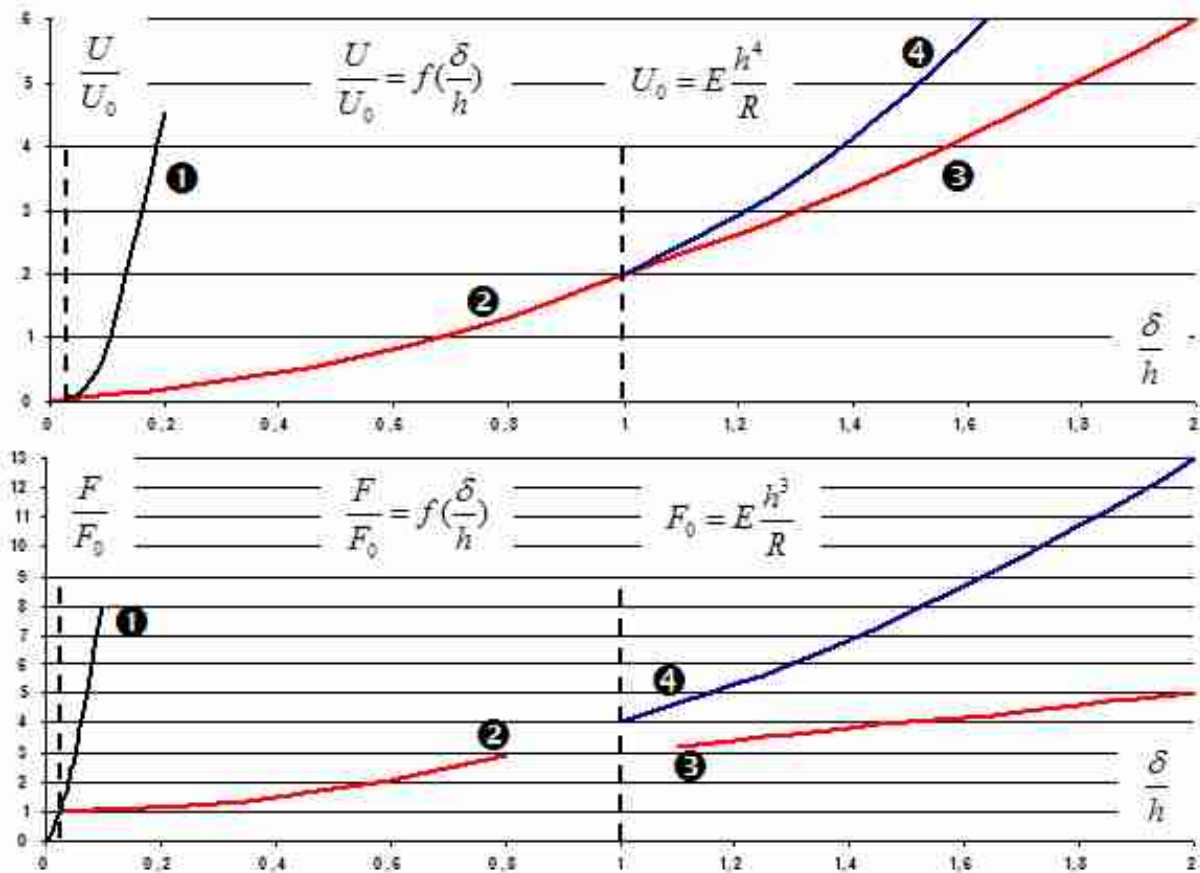
$$l = h \left(\frac{R}{\delta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

4°) Montrer que l'énergie élastique du pli est d'ordre :

$$U \sim E \frac{h^2 \delta^2}{R}$$

et estimer la force F en remarquant que l'énergie de courbure dans la calotte est négligeable. Vérifier enfin que la configuration flambée est effectivement plus avantageuse du point de vue énergétique lorsque $\delta \gg h$.

5°) A quels régimes de frappe correspondent les courbes 1,2,3 de la figure schématisant les résultats représentés en échelle réduite ? Que représente la courbe 4 ?



6°) Quelle ordre de grandeur de vitesse doit atteindre une balle de ping-pong pour flamber lors de son rebond ?