

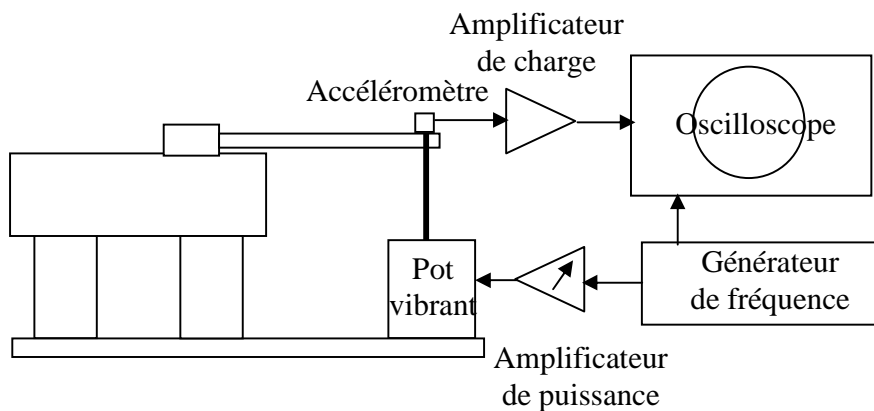
## Résonance d'une poutre en vibration transversale

### Approche théorique

Analyser les équations régissant le mode vibratoire d'une poutre libre à une extrémité, encastrée à l'autre (voir annexe théorie). Comparer les méthodes d'approximation proposées pour la détermination de la **première fréquence de résonance** (fréquence fondamentale) et en déduire quelle méthode d'approche s'adaptera au banc expérimental à votre disposition.

### Montage expérimental

Le banc expérimental (voir figure) est constitué d'un générateur de fréquence équipé d'un déphaseur et d'un ampli de puissance qui excitent un pot vibrant dont les fréquences propres de résonance sont  $\approx 1$  Hz et  $\approx 600$  Hz. La poutre est reliée au système d'excitation par un équipage mobile de masse 241 g. La mesure de l'amplitude s'effectue à l'aide d'un accéléromètre (l'accélération étant proportionnelle à l'amplitude), dont on compare le signal de sortie avec le signal du générateur sur un oscilloscope. Il n'est pas utile (et même dangereux pour le matériel) d'imposer (via l'amplificateur) un courant trop élevé dans la bobine du pot vibrant, seule la visualisation de l'amplitude de vibration de la poutre étant nécessaire. Un réglage d'un quart de tour sur le bouton de gain de l'amplificateur suffit à détecter les résonances des différentes poutres.



### Détermination expérimentale des fréquences de résonance

#### *Théorie versus expérience*

A partir de la recherche de la résonance d'une poutre en Dural de longueur libre 150 mm et d'épaisseur 5 mm, comparer les valeurs théoriques et expérimentale de sa fréquence fondamentale. En déduire le modèle à retenir.

#### *Influence de la géométrie et du matériau*

En étudiant les différentes poutres mises à votre disposition, montrer l'influence de la géométrie et des propriétés du matériau sur la valeur de la **fréquence de résonance fondamentale**. Il est important de noter, au fur et à mesure des tests, tout comportement quelque peu surprenant (par exemple, il est probable que pour certaines poutres, on observe plusieurs pics d'amplitude rapprochés). Représenter (dans un diagramme log-log) l'évolution de la fréquence fondamentale en fonctions des paramètres que vous avez fait varier. Comment se comparent les résultats expérimentaux vis à vis de la loi théorique retenue. Donner vos conclusions notamment sur les différences de comportement dural – plexiglas. Quelles sont les causes des écarts constatés dans le cas du dural ? Les mêmes causes peuvent-elles expliquer les écarts constatés dans le cas du plexiglas ?

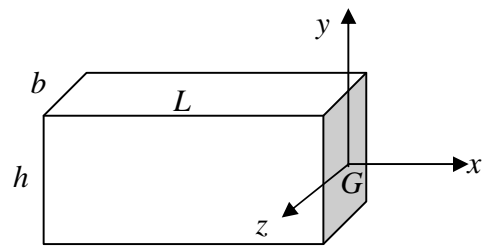
**Comportement au voisinage de la résonance**

Pour deux poutres dont le comportement diffère de façon importante, le tracé de l'amplitude  $a(v)$  et du déphasage  $\phi(v)$  observés autour de la fréquence de résonance est plus ou moins aplati. On peut en effet observer soit une montée brusque de l'amplitude et de la phase, soit une montée très étalée. Faire un relevé précis de ces deux paramètres pour la poutre en dural 200x5 mm et pour la poutre en plexi 100x5 mm. Peut-on alors expliquer les écarts à la théorie constatés dans le cas du plexi ?

Définition des paramètres :

- $h$  hauteur de la poutre (suivant  $Gy$ )
- $b$  largeur de la poutre (suivant  $Gz$ )
- 20 mm pour toutes les poutres
- $L$  longueur **libre** de la poutre (suivant  $Gx$ )

$I = \frac{bh^3}{12}$  moment d'inertie de section droite par rapport à  $Gz$



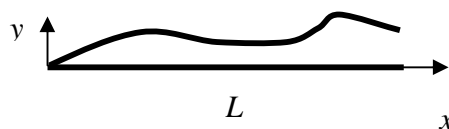
$E$  module d'Young                      Dural : 7000 daN.mm<sup>-2</sup>  
 $\rho$  masse volumique                      Dural : 2500 kg.m<sup>-3</sup>

Plexi : 250 daN.mm<sup>-2</sup>  
 Plexi : 1200 kg.m<sup>-3</sup>

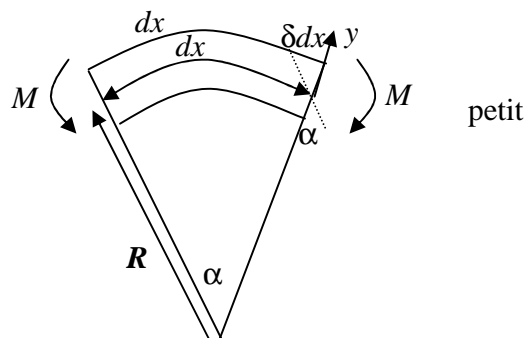
## Annexe : Modes propres de vibration de flexion d'une poutre

### Déformée d'une poutre en flexion dans l'hypothèse de la résistance des matériaux

Une poutre élancée rectiligne d'axe  $x$ , de longueur  $L$  et de section droite d'aire  $S$  (hauteur  $h$  et largeur  $b$  vérifiant  $h, b \ll L$ ) fléchit sous l'action d'un chargement linéique transversal  $q(x)$  et prend une déformée  $y(x)$ . Pour des chargements modérés, induisant une déformée telle que le déplacement transversal reste petit devant les dimensions transversales de la poutre :  $y(x) \ll b, h$ , les sections droites restent droites (ne gauchissent pas) et tournent simplement l'une par rapport à l'autre.



$M(x)$  caractérisant le moment de flexion à l'abscisse  $x$  résultant du chargement  $q(x)$ , écrivons, dans cette hypothèse de flexion faible, l'équilibre mécanique d'un tronçon de longueur  $dx$  sous l'action du moment  $M(x)$ .



En traçant au centre de la section droite terminale la parallèle à la section droite d'entrée, l'angle  $\alpha$  caractérisant la rotation relative des deux sections par rapport à l'état non fléchi s'écrit sous la forme :

$\alpha = \frac{dx}{R} = \frac{\delta dx}{y}$ , soit  $\frac{\delta dx}{dx} = \frac{y}{R}$ . Le rapport  $\frac{\delta dx}{dx}$  n'est autre que la déformation d'allongement  $\epsilon_{xx}$  de sorte

que la déformation d'allongement des fibres de la poutre s'écrit :  $\epsilon_{xx} = \frac{y}{R}$ .  $E$  caractérisant le Module d'Young du matériau constitutif de la poutre, la contrainte de traction  $\sigma_{xx}$  s'écrit :

$$\sigma_{xx} = \frac{E y}{R}$$

La force résultante  $F$  induite par ces contraintes et le moment de flexion résultant  $M$  sont donnés par :

$$F = \iint_S \sigma_{xx} dS = \frac{E}{R} \int_{-h/2}^{h/2} b y dy = 0 \qquad M = \iint_S \sigma_{xx} y dS = \frac{E}{R} \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = \frac{E I}{R}$$

$I = \frac{b h^3}{12}$  étant le moment quadratique (couramment appelé moment d'inertie de flexion) de la section droite par rapport à l'axe de flexion  $z$ .  $F=0$  traduit l'absence de force appliquée et la seconde relation exprime la proportionnalité entre la courbure locale  $\frac{1}{R}$  de la déformée et le moment de flexion appliqué  $M$  et constitue l'équation différentielle de la déformée.

Dans l'hypothèse des petits déplacement envisagée ici, la courbure  $\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \approx \frac{d^2 y}{dx^2}$ .

L'équation différentielle de la déformée se réduit à :

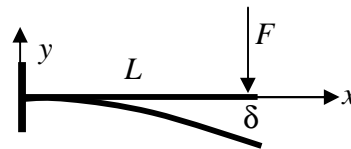
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$$

Le signe - provient du fait que la déformée  $y(x)$  est repérée dans le référentiel  $x,y,z$  alors que le moment de flexion  $M(x)$  est défini dans le trièdre de Frenet : tangente  $t$ , normale  $n$  et binormale  $r$  avec  $t=x$ ,  $r=-z$  et  $n=-y$

### Déformée d'une poutre encastree chargée par une force d'extrémité

Dans une section d'abscisse  $x$  le moment fléchissant est :

$$M(x) = F(L-x)$$

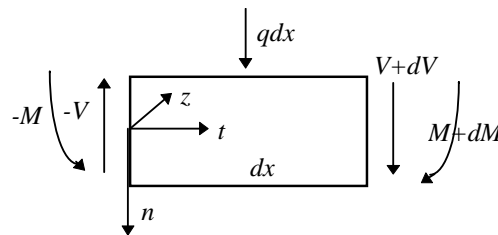


L'intégration de l'équation différentielle  $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -F(L-x)$  avec les conditions aux limites imposées par l'encastrement  $y(0)=0$  (pas de déplacement possible au niveau de l'encastrement) et  $\frac{dy}{dx}(0)=0$  (la poutre doit rester perpendiculaire à l'encastrement) conduit à la déformée :

$$y(x) = \frac{\delta}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \left( 3 - \frac{x}{L} \right) \quad \text{avec } \delta \text{ flèche d'extrémité donnée par } \delta = \frac{FL^3}{3EI}$$

### Équation différentielle de la déformée en terme de chargement linéique $q(x)$

Dans le trièdre de Frenet, écrivons l'équilibre mécanique du tronçon de longueur  $dx$  soumis au chargement linéique  $q(x)$ .



L'équilibre des forces (nullité de la résultante) s'écrit :

$$-V + q dx + V + dV = 0 \text{ soit } q(x) = -\frac{dV}{dx}$$

L'équilibre des moments par rapport à l'origine du trièdre s'écrit :

$-\vec{M} + (\vec{V} + d\vec{V}) \wedge \vec{t} + \vec{M} + d\vec{M} = 0$  soit en projection sur l'axe  $z$  :  $-M - (V + dV) dx + M + dM = 0$ . Soit en négligeant le terme du second ordre  $dV dx$  :  $V(x) = \frac{dM}{dx}$

En différentiant deux fois l'équation différentielle de la déformée  $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$  écrite en terme de moment fléchissant et en tenant compte des deux relations précédentes, l'équation s'écrit finalement en terme de chargement linéique :

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x).$$

### Équation différentielle des modes propres de vibration d'une poutre

La masse linéique  $m(x)$  étant égale à  $\rho S$ , la force d'inertie linéique  $q(x)$  induite par la vibration sera :

$q(x) = -m(x)\gamma(x) = -\rho S \frac{d^2 y}{dt^2}$ ,  $\gamma(x) = \frac{d^2 y}{dt^2}$  étant l'accélération induite par la vibration, d'où l'équation différentielle des vibrations libres :

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\rho S \frac{d^2 y}{dt^2} \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

Compte tenu des hypothèses de flexion faible, la solution de cette équation ne sera acceptable que dans la mesure où l'amplitude de vibration  $a$  reste petite devant l'épaisseur  $h$  :  $a \ll h$ .

En posant  $k^4 = \frac{\rho S \omega^2}{EI}$  et en séparant les parties temporelles et spatiales  $y(x,t) = Y(x) \exp(i\omega t)$  l'équation différentielle donnant l'amplitude  $Y(x)$  de la déformée à la pulsation  $\omega$  s'écrit :

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} + k^4 Y = 0$$

La solution de cette équation s'écrit sous la forme générale :

$$Y(x) = A_1 \exp(k_1 x) + A_2 \exp(k_2 x) + A_3 \exp(k_3 x) + A_4 \exp(k_4 x)$$

$k_1 = k, k_2 = -k, k_3 = ik$  et  $k_4 = -ik$  étant les racines de l'équation  $k^4 = \frac{\rho S \omega^2}{EI}$ . Avec  $k = \left( \frac{\rho S \omega^2}{EI} \right)^{1/4}$

Elle s'écrit donc également sous la forme plus commode :

$$Y = a \sin(kx) + b \cos(kx) + c \operatorname{sh}(kx) + d \operatorname{ch}(kx)$$

### Modes et fréquences propres

Les valeurs admissibles de la quantité  $k$  valeurs seront données par les racines  $k_i L = \alpha_i$  d'une équation  $f(kL) = 0$ , la fonction  $f$  étant elle-même définie par les 4 conditions aux limites nécessaires pour déterminer les relations entre les 4 constantes d'intégration  $a, b, c, d$ .

Il en résulte que seule une série de pulsations discrètes  $\omega_i$  (fréquences propres de vibration) sera autorisée, ces pulsations étant obtenues sous la forme générale :

$$\omega_i = \alpha_i^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{I}{S}} \qquad v_i = \frac{1}{2\pi} \alpha_i^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{I}{S}} \qquad k_i = \frac{\alpha_i}{L}$$

A chacune de ces fréquences sera associé un profil d'amplitude de déformée  $Y(\omega_i, x) = Y_i(x)$  appelé mode propre de vibration.

Les fréquences propres (fréquences de résonance) résultent dans ce modèle de la compétition entre les forces d'inertie et les forces de rappel élastique. L'équation aux vibrations ne contient aucun terme susceptible de limiter l'amplitude des oscillations de sorte que la solution en amplitude ne sera définie qu'à une constante multiplicative arbitraire près.

Les fréquences propres sont la combinaison d'un terme  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$  caractérisant les propriétés intrinsèque du matériau (élasticité  $E$ , inertie  $\rho$ ) qui s'identifie à la vitesse de propagation du son dans la poutre et d'un terme géométrique  $\frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{I}{S}}$  qui caractérise la géométrie de la structure.

### Modes propres de vibration d'une poutre encastree élancée de section rectangulaire

Avec  $S=bh$  et  $I=\frac{bh^3}{12}$ , les fréquences propres sont données par :

$$v_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{12}} \alpha_i^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2} \quad k_i^4 = \frac{12\rho\omega_i^2}{Eh^2}$$

et les modes propres par :

$$Y_i(x) = a\sin(k_i x) + b\cos(k_i x) + c\operatorname{sh}(k_i x) + d\operatorname{ch}(k_i x)$$

Dans le cas d'une poutre encastree, les conditions aux limites sont :

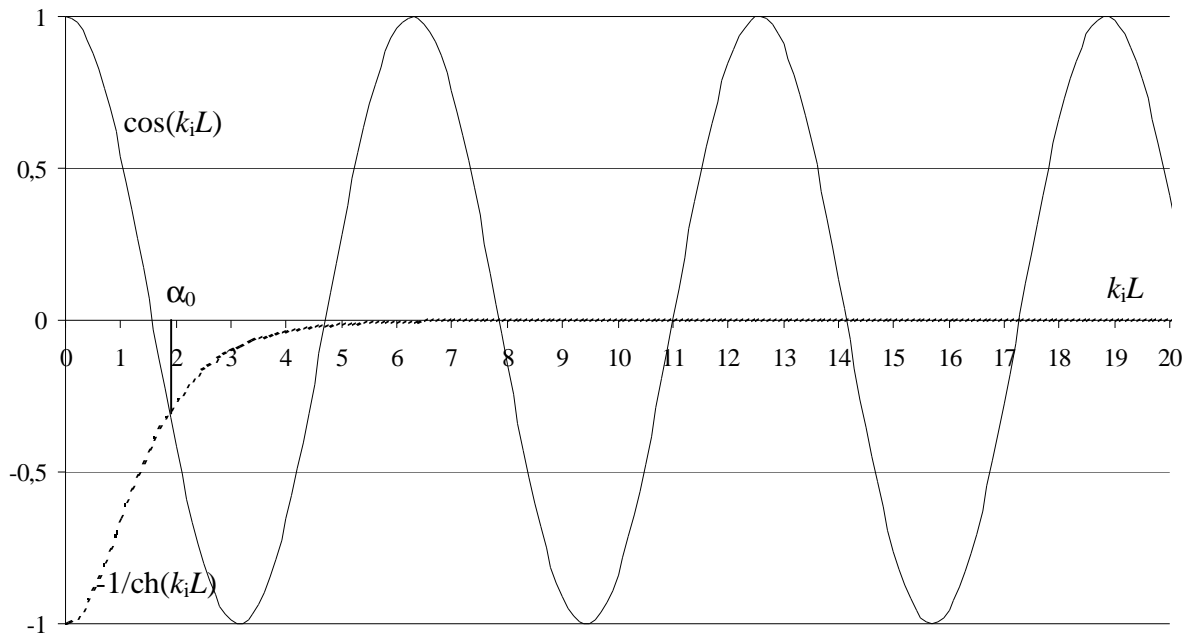
- $Y_i(0) = 0 = b + d$  Déplacement d'encastrement interdit
- $\frac{dY_i}{dx}(0) = 0 = a + c$  Rotation interdite à l'encastrement
- $\frac{d^2 Y_i}{dx^2}(L) = 0 = k_i^2 \{-a\sin(k_i L) - b\cos(k_i L) + c\operatorname{sh}(k_i L) + d\operatorname{ch}(k_i L)\}$  Absence de moment de flexion à l'extrémité libre
- $\frac{d^3 Y_i}{dx^3}(L) = 0 = k_i^3 \{-a\cos(k_i L) + b\sin(k_i L) + c\operatorname{ch}(k_i L) + d\operatorname{sh}(k_i L)\}$  Absence d'effort tranchant à l'extrémité libre

$a, b, c, d$  sont solution du système linéaire :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(k_i L) & -\cos(k_i L) & \operatorname{sh}(k_i L) & \operatorname{ch}(k_i L) \\ -\cos(k_i L) & \sin(k_i L) & \operatorname{ch}(k_i L) & \operatorname{sh}(k_i L) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ce système n'admet une solution  $a, b, c, d$  proportionnels à une constante arbitraire près que si son déterminant est nul, soit l'équation aux pulsations propres définies par les conditions aux limites :

$$\operatorname{ch}(k_i L)\cos(k_i L) = -1$$



Les racines  $\alpha_i$  sont :  $\alpha_0 = 1.875$ ,  $\alpha_1 = 4.695$ ,  $\alpha_2 = 7.85$ , ...,  $\alpha_i = (2i+1)\frac{\pi}{2}$  pour  $i > 2$ . Au delà du mode fondamental, les fréquences propres sont régulièrement espacées car  $\text{ch}(k_i L)\cos(k_i L) = 1$  s'écrit  $\cos(k_i L) = 1/\text{ch}(k_i L)$  avec  $1/\text{ch}(k_i L)$  décroissant très rapidement vers zéro de sorte que l'équation aux fréquences propres se réduit à  $\cos(k_i L) = 0$ .

Les relations :

$$b+d=0$$

$$a+c=0$$

$$-a\sin(k_i L) - b\cos(k_i L) + c\text{sh}(k_i L) + d\text{ch}(k_i L) = 0$$

$$-a\cos(k_i L) + b\sin(k_i L) + c\text{ch}(k_i L) + d\text{sh}(k_i L) = 0$$

conduisent à :

$$c = -a$$

$$d = -b$$

$$-a\{\sin(k_i L) + \text{sh}(k_i L)\} = b\{\cos(k_i L) + \text{ch}(k_i L)\}$$

$$a\{\cos(k_i L) + \text{ch}(k_i L)\} = b\{\sin(k_i L) - \text{sh}(k_i L)\}$$

soit, en conservant  $a$  comme constante multiplicative arbitraire d'amplitude :

$$c = -a \quad b = -\frac{\sin(k_i L) + \text{sh}(k_i L)}{\cos(k_i L) + \text{ch}(k_i L)} = \frac{\cos(k_i L) + \text{ch}(k_i L)}{\sin(k_i L) - \text{sh}(k_i L)} \quad d = -b$$

les deux expressions de  $b$  conduisant à la relation  $\text{ch}(k_i L)\cos(k_i L) = -1$ .

L'équation  $Y_i(x) = a\sin(k_i x) + b\cos(k_i x) + c\text{sh}(k_i x) + d\text{ch}(k_i x)$  du mode propre d'ordre  $i$  s'écrit :

$$Y_i(x) = a \left\{ \sin(k_i x) - \text{sh}(k_i x) + \frac{\cos(k_i L) + \text{ch}(k_i L)}{\sin(k_i L) - \text{sh}(k_i L)} [\cos(k_i x) - \text{ch}(k_i x)] \right\}$$

En notant  $\delta_i = Y_i(L) = -2a \frac{\sin(k_i L)\text{sh}(k_i L)}{\sin(k_i L) - \text{sh}(k_i L)}$  l'amplitude de la flèche à l'extrémité libre :

$$Y_i(x) = -\frac{1}{2} \delta_i \frac{\sin(k_i L) - \text{sh}(k_i L)}{\sin(k_i L)\text{sh}(k_i L)} \left\{ \sin(k_i x) - \text{sh}(k_i x) + \frac{\cos(k_i L) + \text{ch}(k_i L)}{\sin(k_i L) - \text{sh}(k_i L)} [\cos(k_i x) - \text{ch}(k_i x)] \right\}$$

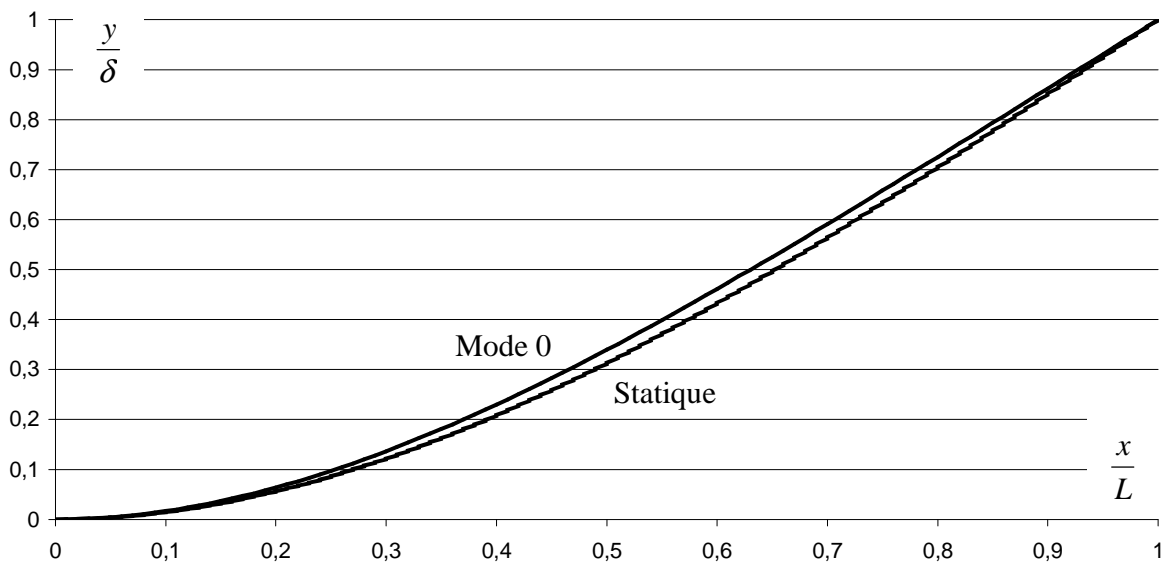
$$Y_i(x) = -\frac{1}{2 \sin \alpha_i \operatorname{sh} \alpha_i} \delta_i \left\{ (\sin \alpha_i - \operatorname{sh} \alpha_i) \left( \sin \left( \alpha_i \frac{x}{L} \right) - \operatorname{sh} \left( \alpha_i \frac{x}{L} \right) \right) + (\cos \alpha_i + \operatorname{ch} \alpha_i) \left[ \cos \left( \alpha_i \frac{x}{L} \right) - \operatorname{ch} \left( \alpha_i \frac{x}{L} \right) \right] \right\}$$

### Mode fondamental

$$\alpha_0 = 1.875 \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{12}} \alpha_0^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2} = 0,161 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2} \quad k_0 = \left( \frac{\rho S \omega_0^2}{EI} \right)^{1/4} = \frac{\alpha_0}{L}$$

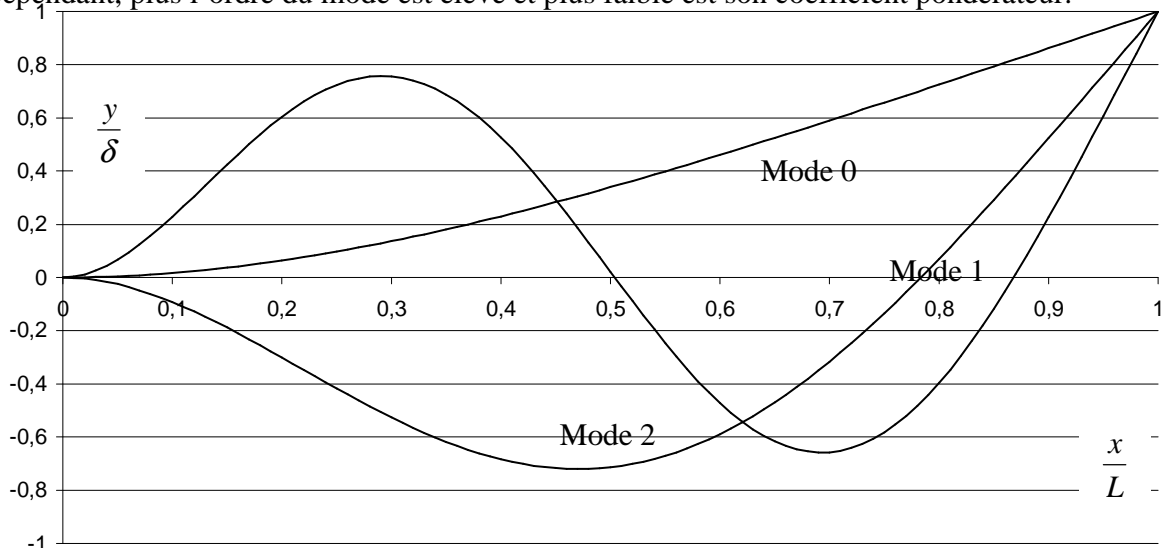
A.N. Dural :  $L=150$  mm,  $h=5$  mm,  $E=7000$  daN.mm<sup>-2</sup>,  $\rho=2,7 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup>  $v_0=182.8$  Hz

La figure suivante compare en coordonnées réduites  $(\frac{y}{\delta}, \frac{x}{L})$  les déformées du mode statique sous charge ponctuelle à l'extrémité libre et du mode fondamental de vibration libre (d'ordre 0).



### Modes d'ordre supérieur

Le nombre de nœuds est égal à l'ordre du mode. La figure ci dessous schématise l'allure des premiers modes. Le mode fondamental est le plus facile à exciter. La théorie des modes propres montre que la déformée statique peut être obtenue par la somme pondérée (les facteurs de pondération étant fonction du chargement statique imposé) des déformées des différents modes propres de vibration libre. Cependant, plus l'ordre du mode est élevé et plus faible est son coefficient pondérateur.





## Approximation de Rayleigh

La déformée statique sous charge ponctuelle d'extrémité étant très voisine de la déformée de vibration libre du mode 0, ce qui signifie que le mode 0 est le mode prépondérant dans la décomposition en mode propre pour ce type de chargement, Rayleigh a déterminé une méthode approchée de calcul de la fréquence de résonance du fondamental sous les deux hypothèses suivantes :

- La déformée du fondamental est assimilée à la déformée statique sous l'action d'une masse équivalente  $M_e$  placée à l'extrémité d'une poutre supposée non pesante dont la raideur  $K$  est donnée par l'analyse statique  $F=K\delta$ , soit  $K=\frac{3EI}{L^3}$  d'après un calcul précédent.
- La masse équivalente de l'éprouvette (de masse  $M$ ) du point de vue des effets inertiels est obtenue par égalité des énergies cinétiques dans les deux configurations : masse uniformément répartie sur la longueur et masse concentrée à l'extrémité libre.



L'égalité des énergies cinétiques conduit à la relation  $\frac{1}{2} M_e \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 dx$ .

Soit, avec  $w(x,t) = \frac{\delta}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \left( 3 - \frac{x}{L} \right) \exp(i\omega t)$  :

$$M_e = \int_0^L \rho S \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 dx = \rho S \frac{1}{4} \int_0^L \left( \frac{x}{L} \right)^4 \left( 3 - \frac{x}{L} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \rho S L \int_0^1 x^4 (3-x)^2 dx = \frac{33}{140} \rho S L = \frac{33}{140} M.$$

La fréquence  $\nu_0$  est la fréquence propre d'un ressort de raideur  $K$  supportant une masse  $M_e$ , soit :

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M_e}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{140}{4 \cdot 33}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2} = 0,164 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2}$$

à comparer avec la solution exacte  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{12}} \alpha_0^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2} = 0,161 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2}$ , soit une erreur relative :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 1,8 \%$$

## Correction de masse ajoutée

Si l'on prend en compte la masse  $M_a$  du capteur d'accélération et de la pièce de liaison entre l'excitateur et l'éprouvette, la formule de Rayleigh devient :

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M_e + M_a}}$$

Pour les éprouvettes en plexiglas et pour les éprouvettes de Dural de faible épaisseur, la masse équivalente de la poutre  $M_e$  devient négligeable devant la masse  $M_a$  de liaison, de sorte que la fréquence du fondamental devient :

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M_a}} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{Eb}{M_a}} \left(\frac{h}{L}\right)^{3/2}$$

et ne suit plus la loi d'échelle précédente.

### Résonance de structure

Les théories précédentes ne comportent pas de terme susceptible de limiter l'amplitude de la résonance dont le facteur de qualité  $Q$  est infini. Or tous les matériaux présentent des frottements internes (analogues aux pertes visqueuses) caractérisés par le coefficient de perte  $f$ .

Dans l'approximation de Rayleigh le modèle de résonance comporte un amortisseur visqueux de coefficient de perte  $f$  en parallèle à un ressort de raideur  $K$  supportant la masse  $M$ . L'équation de la dynamique s'écrit alors :

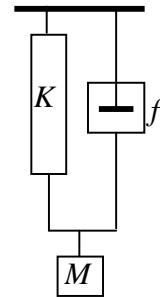
$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + Kx = F \exp(i\omega t) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{f}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{M} x = \frac{F_0}{M} \exp(i\omega t)$$

$F_0$  étant l'amplitude de la force excitatrice.

En posant  $\omega_r^2 = \frac{K}{M}$ ,  $\omega_r$  étant la fréquence de résonance de l'oscillateur non amorti,

et  $\mu = \frac{f}{M}$ , la solution s'écrit sous la forme  $x = X_0 \exp(i\omega t + \varphi)$  vérifiant en amplitude et en phase :

$$\frac{X_o}{F_o} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2}} \quad \text{tg } \varphi = -\frac{\mu \omega}{\omega_r^2 - \omega^2}$$



L'allure de la réponse autour de la résonance est donnée dans la figure ci dessous :

- **Elasticité :** A basse fréquence,  $\omega \rightarrow 0$ , le terme dominant de l'équation

$M \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + Kx = F_0 \exp(i\omega t)$  est le terme de rappel élastique et l'équation se réduit à :

$$Kx = F_0 \exp(i\omega t) \quad \omega \ll \omega_r \quad X_o \approx \frac{F_o}{K} \quad \varphi \approx 0$$

Régime quasi statique : pilotage en élasticité

- **Inertie :** A haute fréquence,  $\omega \gg \omega_r$ , le terme dominant de l'équation

$M \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + Kx = F_0 \exp(i\omega t)$  est le terme d'inertie et l'équation se réduit à :

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = F_0 \exp(i\omega t) \quad \omega \gg \omega_r \quad X_o \approx \frac{F_o}{M \omega^2} \quad \varphi \approx -\pi$$

Régime inertiel: l'effet de la masse est celui d'un filtre passe bas avec une coupure en  $\frac{1}{\omega^2}$ .

- Viscosité: Au voisinage de la fréquence de résonance,  $\omega \approx \omega_r$ , le terme dominant de l'équation  $M \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + Kx = F \exp(i\omega t)$  est le terme d'amortissement car les termes d'inertie et de rappel élastique se compensent et l'équation se réduit à :

$$f \frac{dx}{dt} = F_0 \exp(i\omega t) \quad \omega \approx \omega_r \quad X_0 \approx \frac{F_0}{f\omega} \quad \varphi \approx \pi/2$$

Régime d'amortissement : limitation du facteur de surtension  $Q$  et élargissement du pic de la résonance qui s'accompagne d'un léger décalage de la résonance en général négligeable, l'amortissement étant en général faible.

$$\frac{X_0}{F_0}(\omega_r) = \frac{1}{\mu\omega_r} \quad \frac{X_0}{F_0}(\omega_r \pm \frac{\Delta\omega}{2}) \approx \frac{1}{\omega_r \mu \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\mu}\right)^2}} = \frac{1}{2} \frac{X_0}{F_0}(\omega_r) = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu\omega_r} \Rightarrow \Delta\omega = \sqrt{3}\mu$$

et le facteur de qualité (ou de surtension)  $Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{\omega_r}{\sqrt{3}\mu}$  décroît lorsque l'amortissement augmente.

