# Éléments de Calcul Tensoriel

- I Les Tenseurs
- II Les Opérateurs Différentiels

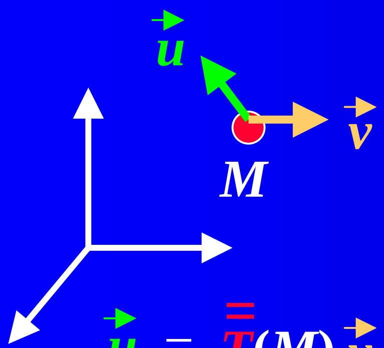
ESPCI

# I Les Tenseurs

- I-1 Définition des Tenseurs
- I-2 Opérations sur les Tenseurs
- I-3 Symétrie et Antisymétrie
- I-4 Tenseurs Identité et d'Antisymétrie
- I-5 Produits Scalaire et Vectoriel

# I-1 Définition des Tenseurs

Tenseur : Opérateur liant dans un même repère deux grandeurs physiques en un même point d'un espace de dimension $d$




$$\vec{u} = \overline{\overline{T}}(M)\,\vec{v}$$

Ses composantes dans un repère donné

ne dépendent que du ***M***

Le Rang d'un tenseur caractérise son nombre d'indices

$T^{(0)}$ Tenseur de Rang 0 : Scalaire à $d^0 = 1$ composante $T(M)$

$T^{(1)}$ Tenseur de Rang 1 : Vecteur à $d^1$ composantes $T_i(M)$

$T^{(2)}$ Tenseur de Rang 2 : Matrice à $d^2$ composantes $T_{ij}(M)$

$T^{(n)}$ Tenseur de Rang n : Matrice à $d^n$ composantes $T_{ij\ldots n}(M)$

# I-2 Opérations sur les Tenseurs

**Addition tensorielle** (+) : Tenseurs de même Rang

$$C^{(n)} = A^{(n)} + B^{(n)} \qquad C_{ij\ldots n} = A_{ij\ldots n} + B_{ij\ldots n}$$

**Produit tensoriel** (⊗)

$$C^{(n+m)} = A^{(n)} \otimes B^{(m)} \qquad C_{ij\ldots n\ldots n+m} = A_{ij\ldots n}\, B_{ij\ldots m}$$

**Produit Contracté** (·) sur l'indice *k*

$$C^{(n+m-2)} = A^{(n)} \cdot B^{(m)} \qquad C_{ij\ldots n+m-2} = \sum_{k=1}^{d} A_{ij\ldots k\ldots n}\, B_{ij\ldots k\ldots m}$$

La contraction peut s'effectuer sur plusieurs indices, chaque contraction diminuant de 2 le rang du tenseur contracté résultant

**Convention des indices muets**

Un indice de contraction, indice répété dit muet, implique la sommation sur l'ensemble des valeurs **{1…*d*}** prises par cet indice

$$C^{(2)} = A^{(2)} \cdot B^{(2)} \qquad C_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ik}B_{kj} = A_{ik}B_{kj} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + A_{i2}B_{3j}$$

# I-3 Symétrie et Antisymétrie

**Symétrie** par rapport au couple d'indices ***l*,*r***

$C^{(t)}$ symétrique $\{l,r\}$ $\quad C_{ij\ldots l\ldots r\ldots t} = C_{ij\ldots r\ldots l\ldots t}$

$C^{(t)}$ antisymétrique $\{l,r\}$ $\quad C_{ij\ldots l\ldots r\ldots t} = -C_{ij\ldots r\ldots l\ldots t}$

**Symétrie complète** $\forall$ le couple d'indices $\alpha,\beta \in \{1..t\}$

$C^{(t)}$ symétrie complète $\quad C_{ij\ldots\alpha\ldots\beta\ldots t} = C_{ij\ldots\beta\ldots\alpha\ldots t}$

$C^{(t)}$ antisymétrique complète $\quad C_{ij\ldots\alpha\ldots\beta\ldots t} = (-1)^P C_{ij\ldots\beta\ldots\alpha\ldots t}$

***P*** étant la parité de la permutation $\{ij\ldots\alpha\ldots\beta\ldots t\} \Rightarrow \{ij\ldots\beta\ldots\alpha\ldots t\}$

Exemple : $\{1.2\ldots4.5.6.7\ldots9\} \Rightarrow \{1.2\ldots7.5.4.6\ldots9\}$ Paire ***P*** = 0 modulo 2

$\{1.2\ldots4.5.6.7\ldots9\} \Rightarrow \{1.2\ldots6.7.5.4\ldots9\}$ Impaire ***P*** = 1 modulo 2

Les propriétés de Symétrie et d'Antisymétrie sont intrinsèques

Elles se conservent par changement de repère

# I-4 Tenseurs Identité et d'Antisymétrie

**Tenseur Identité** $\delta^{(2)}$

$$\delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\delta_{ij} = 1$ si $i = j$
$\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$
$\forall$ le repère

**Tenseur d'Antisymétrie** $\varepsilon^{(3)}$

$\varepsilon_{ijk} = 1$ si $\{i,j,k\}$ permutation **paire** du groupe $\{1,2,3\}$
$\varepsilon_{ijk} = -1$ si $\{i,j,k\}$ permutation **impaire** du groupe $\{1,2,3\}$
$\varepsilon_{ijk} = 0$ si au moins 2 indices égaux

$\delta^{(6)} = \varepsilon^{(3)} \otimes \varepsilon^{(3)}$ a pour composantes : $\delta_{ijkpqr} = \mathrm{Det}\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$

$$\delta_{ijkpqr} = \delta_{ip}(\delta_{jq}\delta_{kr}-\delta_{jr}\delta_{kq})-\delta_{jp}(\delta_{iq}\delta_{kr}-\delta_{ir}\delta_{kq})+\delta_{kp}(\delta_{iq}\,\delta_{jr}-\delta_{ir}\delta_{jq})$$

$\delta^{(4)}$ Contraction $\{i,p\}$ $\quad \delta_{ijkiqr} = \delta_{jkqr} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iqr} = \delta_{jq}\delta_{kr}-\delta_{jr}\delta_{kq} = \mathrm{Det}\begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$

$\delta^{(2)}$ Contraction $\{i,p\}$ $\{j,q\}$ $\quad \delta_{ijkijr} = \delta_{jkjr} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijr} = 2\delta_{kr}$

$\delta^{(0)}$ Contraction $\{i,p\}$ $\{j,q\}$ $\{k,r\}$ $\quad \delta_{ijkijk} = \delta_{jkjk} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 6$

$$\mathrm{Det}(T^{(2)}) = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}T_{ip}T_{jq}T_{kr}$$

# I-5 Produits Scalaire et Vectoriel

**Produit Tensoriel de deux Vecteurs**

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} \quad \vec{v} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} \quad C^{(2)} = \vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{vmatrix} \quad C_{ij} = u_i v_j$$

**Produit Scalaire de deux Vecteurs** $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_k v_k = C_{kk} = \mathrm{Tr}(\vec{u} \otimes \vec{v})$

**Produit Extérieur de deux Vecteurs**

$$P^{(2)} = \vec{u} \otimes \vec{v} - \vec{v} \otimes \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & u_1v_2\text{-}u_2v_1 & u_1v_3\text{-}u_3v_1 \\ \boxed{u_2v_1\text{-}u_1v_2} & 0 & \boxed{u_2v_3\text{-}u_3v_2} \\ \boxed{u_3v_1\text{-}u_1v_3} & u_3v_2\text{-}u_2v_3 & 0 \end{vmatrix} = C^{(2)} - {}^tC^{(2)}$$

**Produit Vectoriel de deux Vecteurs** $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \varepsilon^{(3)} \cdot \{\vec{u} \otimes \vec{v}\}$

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_2v_1 - u_1v_2 \end{vmatrix} \quad \vec{w} = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{P_{23}} \\ \boxed{P_{31}} \\ \boxed{P_{21}} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad w_i = \varepsilon_{ijk} C_{jk}$$

# II Les Opérateurs Différentiels

- II-1 Le Gradient
- II-2 La Divergence
- II-3 Le Rotationnel d’un Vecteur
- II-4 Les Rotationnels d’un Tenseur de Rang 2
- II-5 Le Laplacien

# II-1 Le Gradient

**Gradient d'un Scalaire** $\phi(\vec{x})$

$$d\phi = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\phi \cdot \vec{dx}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\phi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

**Gradient d'un Vecteur** $\vec{u}(\vec{x})$

$$\vec{du} = \overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\,\vec{u} \cdot \vec{dx}$$

$$\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\,\vec{u} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

**Gradient d'un Tenseur de Rang 2** $T^{(2)}(\vec{x})$

$$dT^{(2)} = \mathrm{Grad}^{(3)} T^{(2)} \cdot \vec{dx}$$

$$G_{ijk} = \mathrm{Grad}^{(3)} T^{(2)} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$$

# II-2 La Divergence

**Divergence d'un Vecteur $\vec{u}(\vec{x})$**

$$\mathrm{Div}\,\vec{u} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

**Divergences d'un tenseur de Rang 2 $T^{(2)}(\vec{x})$**

Divergences des Vecteurs Ligne

$$\overrightarrow{\mathrm{Div}}_D\, T^{(2)} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{array} \right.$$

Divergences des Vecteurs Colonne

$$\overrightarrow{\mathrm{Div}}_G\, T^{(2)} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{31}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{32}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Div}_D\, T^{(2)} = \mathrm{Div}_G\, {}^tT^{(2)}$$

$$\mathrm{Div}_G\, T^{(2)} = \mathrm{Div}_D\, {}^tT^{(2)}$$

$T^{(2)} = {}^tT^{(2)}$ **symétrie** $\Rightarrow \mathrm{Div}_D\, T^{(2)} = \mathrm{Div}_G\, T^{(2)}$

# II-3 Le Rotationnel d'un Vecteur

**Opérateur Nabla et Gradient**

$$\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} \qquad {}^t\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\ \vec{u} = \vec{\nabla} \otimes \vec{u} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

**Divergence**

$$\mathrm{Div}\ \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \mathrm{Tr}(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) = \mathrm{Tr}(\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\ \vec{u})$$

**Tenseur Rotationnel**

$$\overline{\overline{\mathrm{Rot}}}\ \vec{u} = {}^t\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\ \vec{u} - \overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\ \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \boxed{\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}} & 0 & \boxed{\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}} \\ \boxed{\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix}$$

**Pseudo Vecteur Rotationnel**

$$\widetilde{\mathrm{Rot}}\ \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \boxed{\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}} \\ \boxed{\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}} \\ \boxed{\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}} \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{\mathrm{Rot}}\ \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \varepsilon^{(3)} \cdot \cdot \{\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\ \vec{u}\}$$

$$\Rightarrow [\widetilde{\mathrm{Rot}}\ \vec{u}]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

# II-4 Rotationnels d'un Tenseur $T^{(2)}$

**Gradient d'un tenseur de Rang 2** $T^{(2)}(\vec{x})$ $\qquad F = \mathrm{Grad}^{(3)} T^{(2)} \qquad F_{ijk} = \dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$

---

**Pseudo Rotationnels d'un tenseur de Rang 2** $T^{(2)}(\vec{x})$

Rotationnels des Vecteurs Ligne

$$[\overline{\overline{\mathrm{Rot}}}_D\, \overline{\overline{T}}\,]_{lk} = \varepsilon_{kij} \frac{\partial T_{lj}}{\partial x_i}$$

$$\overline{\overline{\mathrm{Rot}}}_D\, \overline{\overline{T}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x_3} & \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x_3} - \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial T_{23}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial T_{22}}{\partial x_3} & \dfrac{\partial T_{21}}{\partial x_3} - \dfrac{\partial T_{23}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial T_{22}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial T_{21}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial T_{32}}{\partial x_3} & \dfrac{\partial T_{31}}{\partial x_3} - \dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial T_{32}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial T_{31}}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

Rotationnels des Vecteurs Colonne

$$[\overline{\overline{\mathrm{Rot}}}_G\, \overline{\overline{T}}\,]_{kl} = \varepsilon_{kij} \frac{\partial T_{jl}}{\partial x_i}$$

$$\overline{\overline{\mathrm{Rot}}}_G\, \overline{\overline{T}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial T_{31}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial T_{21}}{\partial x_3} & \dfrac{\partial T_{32}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial T_{22}}{\partial x_3} & \dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x_3} - \dfrac{\partial T_{31}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x_3} - \dfrac{\partial T_{32}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x_3} - \dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial T_{21}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x_2} & \dfrac{\partial T_{22}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x_2} & \dfrac{\partial T_{23}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$${}^t\mathrm{Rot}_D\, T = \mathrm{Rot}_G\, {}^tT$$

$${}^t\mathrm{Rot}_G\, T = \mathrm{Rot}_D\, {}^tT$$

$T = {}^tT$ symétrie $\Rightarrow \mathrm{Rot}_D\, T = {}^t\mathrm{Rot}_G\, T$

# II-4 Le Laplacien

**Laplacien d'un Scalaire** $\phi(\vec{x})$

$$\Delta\phi = \mathrm{Div}(\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\phi)$$

$$\Delta\phi = \mathrm{Div}(\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\phi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\,\partial x_k} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}$$

**Laplacien d'un Vecteur** $\vec{u}(\vec{x})$

$$\vec{\Delta}\,\vec{u} = \mathrm{Div}_D(\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\,\vec{u}\,) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\,\partial x_k} = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \end{array}\right.$$

**Laplacien et Rotationnel**

$$[\widetilde{\mathrm{Rot}}\,\vec{u}\,]_k = \varepsilon_{klm}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}$$

$$\widetilde{\mathrm{Rot}}\,(\widetilde{\mathrm{Rot}}\,\vec{u}) = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}(\mathrm{Div}\,\vec{u}) - \vec{\Delta}\,\vec{u}$$

$$[\widetilde{\mathrm{Rot}}\,(\widetilde{\mathrm{Rot}}\,\vec{u})]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{klm}\frac{\partial u_m}{\partial x_l} = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = [\overrightarrow{\mathrm{Grad}}(\mathrm{Div}\,\vec{u}\,)]_i - [\vec{\Delta}\,\vec{u}\,]_i$$