

Résonance d'une poutre en vibration transversale

Des fins leviers oscillants constituent les éléments clé du fonctionnement de nombreux objets tels que les instruments à anche (clarinette, saxo, accordéon, ...), du microscope à force atomique, de capteurs environnementaux, ... Leur vibration est très sensible aux perturbations extérieures et elle peut être parfois très régulière et parfois très complexe.



La vibration d'une structure élastique est bien plus complexe que celle d'un simple oscillateur harmonique. Les équations de l'élastodynamique doivent être respectées sur un solide déformable étendu, à géométrie potentiellement complexe et sujet à des conditions au contour bien déterminées. Néanmoins, pour des petites vibrations et en présence d'un éventuel faible amortissement, le mouvement global peut être décomposé en la somme de modes propres, chacun se comportant en bonne approximation comme un oscillateur harmonique simple.

Nous allons ici étudier les fréquences des premiers modes propres d'un levier oscillant. Comprendre leur dépendance de la géométrie de la poutre et de la nature du matériau.

Approche théorique

Analyser les équations régissant le mode vibratoire d'une poutre libre à une extrémité, encastrée à l'autre (voir annexe théorie). Comprendre la nature des modes propres et estimer l'ordre des grandeurs des fréquences attendues pour les poutres disponibles. Comprendre l'effet d'un faible amortissement ainsi que d'un forçage sinusoïdal. Estimer l'entité des approximations effectuées pour l'estimation des fréquences propres.

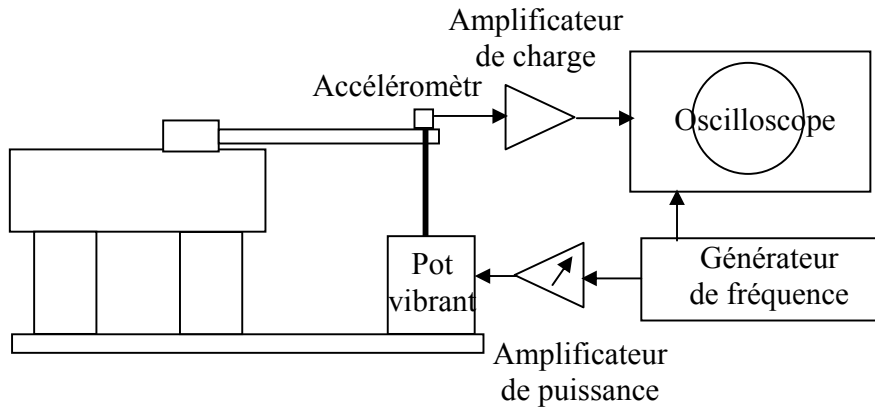
Approche expérimental

Pour mesurer les fréquences de résonance d'une poutre il existe essentiellement deux méthodes expérimentales : (1) on stimule l'extrémité de la poutre par une force oscillante et l'on cherche la fréquence de stimulation pour laquelle l'amplitude de vibration est maximale ; (2) on met la poutre en vibration libre en la sollicitant par une percussion ou par le relâchement rapide d'une force appliquée (avec un doigt), on mesure alors directement la fréquence de vibration spontanément acquise par la poutre. On décrit ici les deux méthodes, mais on utilisera dans ce TP essentiellement la deuxième, qui permet des résultats plus propres.

Montage expérimental 1 : oscillations forcées

Le banc expérimental (voir figure) est constitué d'un générateur de fréquence équipé d'un déphaseur et d'un ampli de puissance qui excitent un pot vibrant dont les fréquences propres de résonance sont ≈ 1 Hz et ≈ 600 Hz. La poutre est reliée au système d'excitation par un équipement mobile de masse 241 g.

La mesure de l'amplitude s'effectue à l'aide d'un accéléromètre (l'accélération étant proportionnelle à l'amplitude), dont on compare le signal de sortie avec le signal du générateur sur un oscilloscope. Il n'est pas utile (et même dangereux pour le matériel) d'imposer (via l'amplificateur) un courant trop élevé dans la bobine du pot vibrant, seule la visualisation de l'amplitude de vibration de la poutre étant nécessaire. Un réglage d'un quart de tour sur le bouton de gain de l'amplificateur suffit à détecter les résonances des différentes poutres.



Montage expérimental 2 : oscillations libres

Les poutres sont simplement encastrées sur une base stable de grande masse (à l'aide de la fixation à vis si la poutre est percée, ou simplement en entreposant la poutre entre deux parties plates de la base et en resserrant les vis si la poutre est plate). On mettra la poutre en vibration en la percutant sèchement avec un objet raide (clé Allen.. ?) ou alors en appuyant fortement avec un doigt et en relâchant brusquement. Vous êtes libres d'améliorer la technique de stimulation pour produire un meilleur son de vibration ! Ceci parce que la mesure de l'oscillation de la poutre se fera justement par enregistrement à l'aide d'un microphone des ondes sonores produites dans l'air par la vibration de la poutre. Le signal sonore sera enregistré à l'aide de la carte son de l'ordinateur et d'un logiciel d'enregistrement et d'analyse des signaux.

Détermination expérimentale des fréquences de résonance

Etude préliminaire sur un réglelet métallique

Un réglelet métallique encastré entre les deux parties du mors constitue un prototype très simple pour étudier les fréquences de résonance des modes propres d'une poutre élançée en fonction de la longueur de la poutre. Il suffit pour cela de faire avancer progressivement le réglelet entre les mors. La forme aplatie du réglelet et la nature peu dissipative du métal permettent à la fois des oscillations durables de forte amplitude et la production efficace d'ondes sonores (même si peu audibles, les intenses variations de pression sont bien enregistrés par un microphone ordinaire).

Avant de commencer la manipulation, estimer le module d'Young du métal en question à l'aide d'une mesure de flexion statique.

Après avoir optimisé les conditions de stimulation et d'enregistrement sur une longueur de poutre d'environ 10 cm, procéder à un enregistrement systématique pour une dizaine de longueurs différentes. En utilisant les outils d'analyse de Fourier inclus dans le logiciel fourni, identifier dans les spectres de puissance les fréquences des premiers modes propres de la poutre. Vérifier l'accord avec la théorie en

appendice : êtes-vous en mesure d'identifier tous les pics observés ? Déterminer pour chaque longueur autant de fréquences propres que possible et vérifier si leur dépendance de la longueur de la poutre est en accord avec les lois théoriques.

Influence de la géométrie et du matériau

En utilisant les sets de poutres en Dural et PMMA mises à votre disposition (poutres initialement prévues pour le montage en oscillation forcée), montrer l'influence de la géométrie et des propriétés du matériau sur la valeur de la **fréquence de résonance fondamentale**.

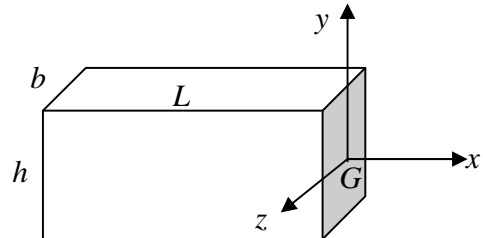
NB : au fur et à mesure que les poutres deviennent épaisses et courtes (donc moins élancées), leur excitation et l'enregistrement acoustique deviennent moins efficaces. Commencez plutôt par les poutres longues et fines et mettez à profit l'expérience acquise pendant l'étude préliminaire pour réussir vos mesures dans le plus grand nombre de poutres possible. Essayez d'estimer les corrections dues aux irrégularités de forme des poutres (parties en excès et trous). Estimez en tout cas l'incertitude globale sur votre mesure.

Représenter (dans un diagramme log-log) l'évolution de la fréquence fondamentale en fonctions des paramètres que vous avez fait varier. Comment se comparent les résultats expérimentaux vis à vis de la loi théorique retenue. Donner vos conclusions notamment sur les différences de comportement dural – plexiglas. Quelles sont les causes des écarts constatés dans le cas du dural ? Les mêmes causes peuvent-elles expliquer les écarts constatés dans le cas du plexiglas ?

Définition des paramètres :

- h* hauteur de la poutre (suivant *Gy*)
- b* largeur de la poutre (suivant *Gz*)
20 mm pour toutes les poutres
- L* longueur **libre** de la poutre (suivant *Gx*)

$I = \frac{bh^3}{12}$ moment d'inertie de section droite par rapport à *Gz*



E module d'Young
ρ masse volumique

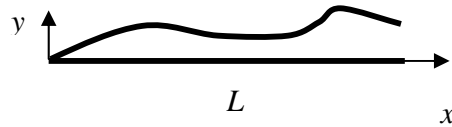
Dural : 70 Gpa
 Dural : 2500 kg.m⁻³

Plexi : 3 GPa
 Plexi : 1200 kg.m⁻³

Annexe théorique : Modes propres de vibration de flexion d'une poutre

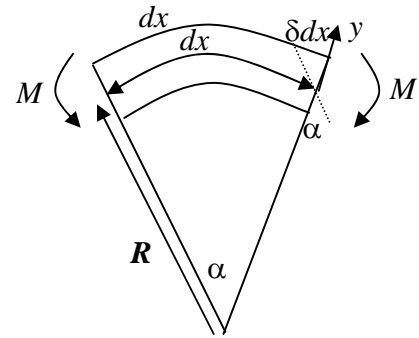
Equations pour la flexion d'une poutre dans l'hypothèse de la résistance des matériaux

Une poutre élancée rectiligne d'axe x , de longueur L et de section droite d'aire S (hauteur h et largeur b vérifiant $h, b \ll L$) fléchit sous l'action d'un chargement linéique transversal $q(x)$ et prend une déformée $y(x)$. Pour des chargements modérés, induisant une déformée telle que le déplacement transversal reste petit devant les dimensions transversales de la poutre : $y(x) \ll b, h$, les sections droites restent droites (ne gauchissent pas) et tournent simplement l'une par rapport à l'autre.



$M(x)$ caractérisant le moment de flexion à l'abscisse x résultant du chargement $q(x)$, écrivons, dans cette hypothèse de flexion faible, l'équilibre mécanique d'un petit tronçon de longueur dx sous l'action du moment $M(x)$.

En traçant au centre de la section droite terminale la parallèle à la section droite d'entrée, l'angle α caractérisant la rotation relative des deux sections par rapport à l'état non fléchi s'écrit sous la forme : $\alpha = \frac{dx}{R} = \frac{\delta dx}{y}$, soit $\frac{\delta dx}{dx} = \frac{y}{R}$. Le rapport $\frac{\delta dx}{dx}$



n'est autre que la déformation d'allongement ε_{xx} de sorte que la déformation d'allongement des fibres de la poutre s'écrit : $\varepsilon_{xx} = \frac{y}{R}$. E caractérisant le Module d'Young du matériau constitutif de la poutre, la contrainte de traction σ_{xx} s'écrit :

$$\sigma_{xx} = \frac{E y}{R}$$

La force résultante F induite par ces contraintes et le moment de flexion résultant M sont donnés par :

$$F = \iint_S \sigma_{xx} dS = \frac{E}{R} \int_{-h/2}^{h/2} b y dy = 0 \quad M = \iint_S \sigma_{xx} y dS = \frac{E}{R} \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = \frac{EI}{R}$$

$I = \frac{bh^3}{12}$ étant le moment quadratique (couramment appelé moment d'inertie de flexion) de la section droite par rapport à l'axe de flexion z . $F=0$ traduit l'absence de force appliquée et la seconde relation exprime la proportionnalité entre la courbure locale $\frac{1}{R}$ de la déformée et le moment de flexion appliqué M et constitue l'équation différentielle de la déformée.

Dans l'hypothèse des petits déplacements envisagée ici, la courbure est $\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} \left/ \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{3/2} \right. \approx \frac{d^2 y}{dx^2}$.

L'équation différentielle de la déformée se réduit à :

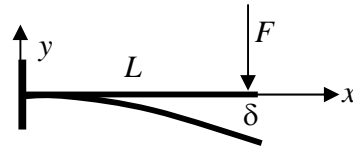
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$$

Le signe - provient du fait que la déformée $y(x)$ est repérée dans le référentiel x, y, z alors que le moment de flexion $M(x)$ est défini dans le trièdre de Frenet : tangente t , normale n et binormale r avec $t=x$, $r=-z$ et $n=-y$

Déformée d'une poutre encastree chargée par une force d'extrémité

Dans une section d'abscisse x le moment fléchissant est :

$$M(x) = F(L-x)$$



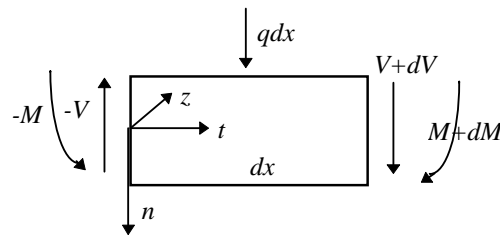
L'intégration de l'équation différentielle $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -F(L-x)$ avec les conditions aux limites imposées par l'encastrement $y(0)=0$ (pas de déplacement possible au niveau de l'encastrement) et $\frac{dy}{dx}(0)=0$ (la poutre doit rester perpendiculaire à l'encastrement) conduit à la déformée :

$$y(x) = \frac{\delta}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \left(3 - \frac{x}{L} \right) \quad \text{avec } \delta \text{ flèche d'extrémité donnée par } \delta = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{F}{K}$$

$$K = \frac{3EI}{L^3}$$

Équation différentielle de la déformée en terme de chargement linéique $q(x)$

Dans le trièdre de Frenet, écrivons l'équilibre mécanique du tronçon de longueur dx soumis au chargement linéique $q(x)$.



L'équilibre des forces (nullité de la résultante) s'écrit :

$$-V + q dx + V + dV = 0 \quad \text{soit} \quad q(x) = -\frac{dV}{dx}$$

L'équilibre des moments par rapport à l'origine du trièdre s'écrit :

$-\vec{M} + (\vec{V} + d\vec{V}) \wedge \vec{t} + \vec{M} + d\vec{M} = 0$ soit en projection sur l'axe z : $-M - (V + dV) dx + M + dM = 0$. Soit en négligeant le terme du second ordre $dV dx$: $V(x) = \frac{dM}{dx}$ et donc $q(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d^2 M}{dx^2}$

En différentiant deux fois l'équation différentielle de la déformée $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$ écrite en terme de moment fléchissant et en tenant compte des deux relations précédentes, l'équation s'écrit finalement en terme de chargement linéique :

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x).$$

Équation différentielle d'une poutre vibrante et détermination des modes propres

La masse linéique $m(x)$ étant égale à ρS , la force d'inertie linéique $q(x)$ induite par la vibration sera :

$q(x) = -m(x)\gamma(x) = -\rho S \frac{d^2 y}{dt^2}$, $\gamma(x) = \frac{d^2 y}{dt^2}$ étant l'accélération induite par la vibration, d'où l'équation différentielle des vibrations libres :

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\rho S \frac{d^2 y}{dt^2} \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

Compte tenu des hypothèses de flexion faible, la solution de cette équation ne sera acceptable que dans la mesure où l'amplitude de vibration a reste petite devant l'épaisseur h : $a \ll h$.

En posant $k^4 = \frac{\rho S \omega^2}{EI}$ et en séparant les parties temporelles et spatiales $y(x,t) = Y(x) \exp(i\omega t)$ l'équation différentielle donnant l'amplitude $Y(x)$ de la déformée à la pulsation ω s'écrit :

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} + k^4 Y = 0$$

La solution de cette équation s'écrit sous la forme générale :

$$Y(x) = A_1 \exp(k_1 x) + A_2 \exp(k_2 x) + A_3 \exp(k_3 x) + A_4 \exp(k_4 x)$$

$k_1 = k, k_2 = -k, k_3 = ik$ et $k_4 = -ik$ étant les racines de l'équation $k^4 = \frac{\rho S \omega^2}{EI}$. Avec $k = \left(\frac{\rho S \omega^2}{EI} \right)^{1/4}$

Elle s'écrit donc également sous la forme plus commode :

$$Y = a \sin(kx) + b \cos(kx) + c \operatorname{sh}(kx) + d \operatorname{ch}(kx)$$

Modes et fréquences propres

Les valeurs admissibles de la quantité k seront données par les racines $k_i L = \alpha_i$ d'une équation $f(kL) = 0$, la fonction f étant elle-même définie par les 4 conditions aux limites nécessaires pour déterminer les relations entre les 4 constantes d'intégration a, b, c, d .

Il en résulte que seule une série de pulsations discrètes ω_i (fréquences propres de vibration) sera autorisée, ces pulsations étant obtenues sous la forme générale :

$$\omega_i = \alpha_i^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{I}{S}} \qquad v_i = \frac{1}{2\pi} \alpha_i^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{I}{S}} \qquad k_i = \frac{\alpha_i}{L}$$

A chacune de ces fréquences sera associé un profil d'amplitude de déformée $Y(\omega_i, x) = Y_i(x)$ appelé mode propre de vibration.

Les fréquences propres (fréquences de résonance) résultent dans ce modèle de la compétition entre les forces d'inertie et les forces de rappel élastique. L'équation aux vibrations ne contient aucun terme susceptible de limiter l'amplitude des oscillations de sorte que la solution en amplitude ne sera définie qu'à une constante multiplicative arbitraire près.

Les fréquences propres sont la combinaison d'un terme $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ caractérisant les propriétés intrinsèque du matériau (élasticité E , inertie ρ) qui s'identifie à la vitesse de propagation du son dans la poutre et d'un terme géométrique $\frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{I}{S}}$ qui caractérise la géométrie de la structure.

Modes propres de vibration d'une poutre encastree élancée de section rectangulaire

Avec $S=bh$ et $I=\frac{bh^3}{12}$, les fréquences propres sont données par :

$$v_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{12}} \alpha_i^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2} \quad k_i^4 = \frac{12\rho\omega_i^2}{Eh^2}$$

et les modes propres par :

$$Y_i(x) = a\sin(k_i x) + b\cos(k_i x) + c\operatorname{sh}(k_i x) + d\operatorname{ch}(k_i x)$$

Dans le cas d'une poutre encastree, les conditions aux limites sont :

- $Y_i(0)=0=b+d$ Déplacement d'encastrement interdit
- $\frac{dY_i}{dx}(0)=0=a+c$ Rotation interdite à l'encastrement
- $\frac{d^2Y_i}{dx^2}(L)=0=k_i^2\{-a\sin(k_i L)-b\cos(k_i L)+c\operatorname{sh}(k_i L)+d\operatorname{ch}(k_i L)\}$ Absence de moment de flexion à l'extrémité libre
- $\frac{d^3Y_i}{dx^3}(L)=0=k_i^3\{-a\cos(k_i L)+b\sin(k_i L)+c\operatorname{ch}(k_i L)+d\operatorname{sh}(k_i L)\}$ Absence d'effort tranchant à l'extrémité libre

a, b, c, d sont solution du système linéaire :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(k_i L) & -\cos(k_i L) & \operatorname{sh}(k_i L) & \operatorname{ch}(k_i L) \\ -\cos(k_i L) & \sin(k_i L) & \operatorname{ch}(k_i L) & \operatorname{sh}(k_i L) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ce système n'admet une solution (a, b, c, d proportionnels à une constante arbitraire) que si son déterminant est nul, ce qui donne l'équation aux pulsations propres définies par les conditions aux limites :

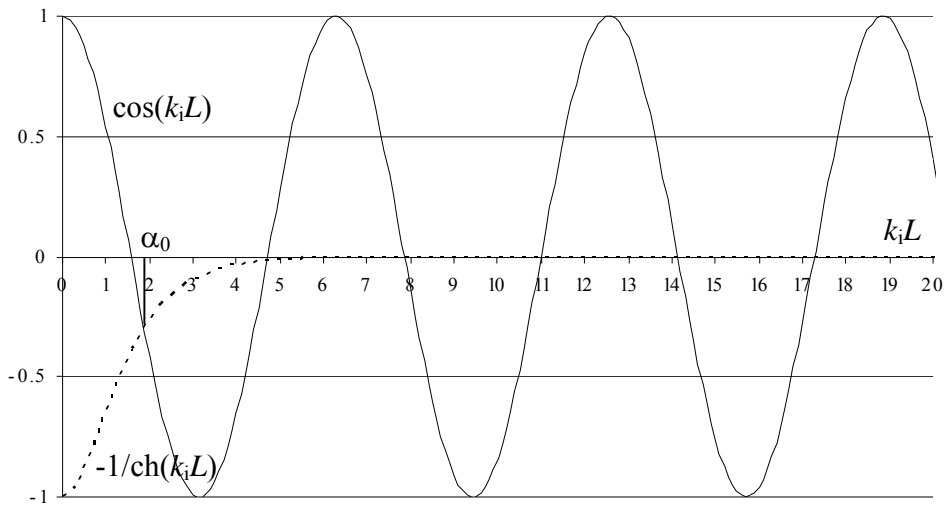
$$\operatorname{ch}(k_i L)\cos(k_i L) = -1$$

qui doit être résolue numériquement ou à l'aide de la représentation graphique en page suivante.

Les racines α_i sont : $\alpha_0 = 1.875$, $\alpha_1 = 4.695$, $\alpha_2 = 7.85$, ..., $\alpha_i = (2i+1)\frac{\pi}{2}$ pour $i > 2$.

Au delà du mode fondamental, les fréquences propres (spatiales) sont presque régulièrement espacées car $\operatorname{ch}(k_i L)\cos(k_i L) = 1$ s'écrit $\cos(k_i L) = 1/\operatorname{ch}(k_i L)$ avec $1/\operatorname{ch}(k_i L)$ décroissant très rapidement vers zéro de sorte que l'équation aux fréquences propres se réduit à $\cos(k_i L) = 0$. NB : comme les fréquences temporelles sont proportionnelles à α_i^2 elle ne sont pas régulièrement espacées ! Leur rapport à la fondamentale est :

$$\frac{v_i}{v_0} = \frac{\alpha_i^2}{\alpha_0^2} = 1, 6.27, 17.55, 34.39, 56.85, \dots$$



Les relations :

$$b+d=0$$

$$a+c=0$$

$$-a\sin(k_i L) - b\cos(k_i L) + c\operatorname{sh}(k_i L) + d\operatorname{ch}(k_i L) = 0$$

$$-a\cos(k_i L) + b\sin(k_i L) + c\operatorname{ch}(k_i L) + d\operatorname{sh}(k_i L) = 0$$

conduisent à :

$$c = -a$$

$$d = -b$$

$$-a\{\sin(k_i L) + \operatorname{sh}(k_i L)\} = b\{\cos(k_i L) + \operatorname{ch}(k_i L)\}$$

$$a\{\cos(k_i L) + \operatorname{ch}(k_i L)\} = b\{\sin(k_i L) - \operatorname{sh}(k_i L)\}$$

soit, en conservant a comme constante multiplicative arbitraire d'amplitude :

$$c = -a \quad b = -\frac{\sin(k_i L) + \operatorname{sh}(k_i L)}{\cos(k_i L) + \operatorname{ch}(k_i L)} = \frac{\cos(k_i L) + \operatorname{ch}(k_i L)}{\sin(k_i L) - \operatorname{sh}(k_i L)} \quad d = -b$$

les deux expressions de b conduisant à la relation $\operatorname{ch}(k_i L)\cos(k_i L) = -1$.

L'équation $Y_i(x) = a\sin(k_i x) + b\cos(k_i x) + c\operatorname{sh}(k_i x) + d\operatorname{ch}(k_i x)$ du mode propre d'ordre i s'écrit :

$$Y_i(x) = a \left\{ \sin(k_i x) - \operatorname{sh}(k_i x) + \frac{\cos(k_i L) + \operatorname{ch}(k_i L)}{\sin(k_i L) - \operatorname{sh}(k_i L)} [\cos(k_i x) - \operatorname{ch}(k_i x)] \right\}$$

En notant $\delta_i = Y_i(L) = -2a \frac{\sin(k_i L)\operatorname{sh}(k_i L)}{\sin(k_i L) - \operatorname{sh}(k_i L)}$ l'amplitude de la flèche à l'extrémité libre :

$$Y_i(x) = -\frac{1}{2} \delta_i \frac{\sin(k_i L) - \operatorname{sh}(k_i L)}{\sin(k_i L)\operatorname{sh}(k_i L)} \left\{ \sin(k_i x) - \operatorname{sh}(k_i x) + \frac{\cos(k_i L) + \operatorname{ch}(k_i L)}{\sin(k_i L) - \operatorname{sh}(k_i L)} [\cos(k_i x) - \operatorname{ch}(k_i x)] \right\}$$

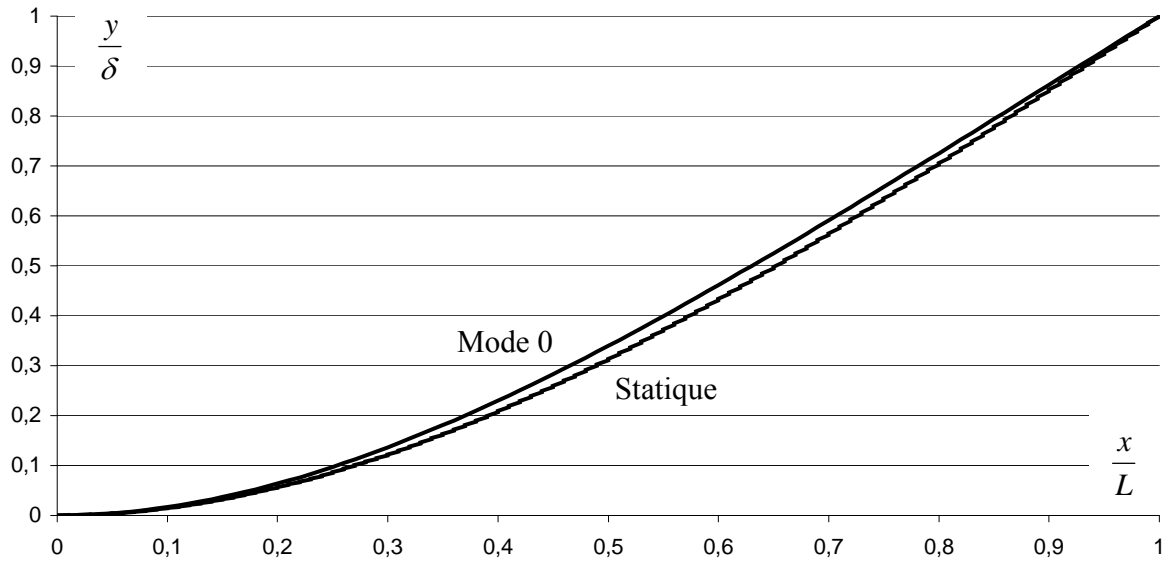
$$Y_i(x) = -\frac{1}{2 \sin \alpha_i \operatorname{sh} \alpha_i} \delta_i \left\{ (\sin \alpha_i - \operatorname{sh} \alpha_i) \left(\sin \left(\alpha_i \frac{x}{L} \right) - \operatorname{sh} \left(\alpha_i \frac{x}{L} \right) \right) + (\cos \alpha_i + \operatorname{ch} \alpha_i) \left[\cos \left(\alpha_i \frac{x}{L} \right) - \operatorname{ch} \left(\alpha_i \frac{x}{L} \right) \right] \right\}$$

Mode fondamental

$$\alpha_0 = 1.875 \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{12}} \alpha_0^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2} = 0,161 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2} \quad k_0 = \left(\frac{\rho S \omega_0^2}{EI} \right)^{1/4} = \frac{\alpha_0}{L}$$

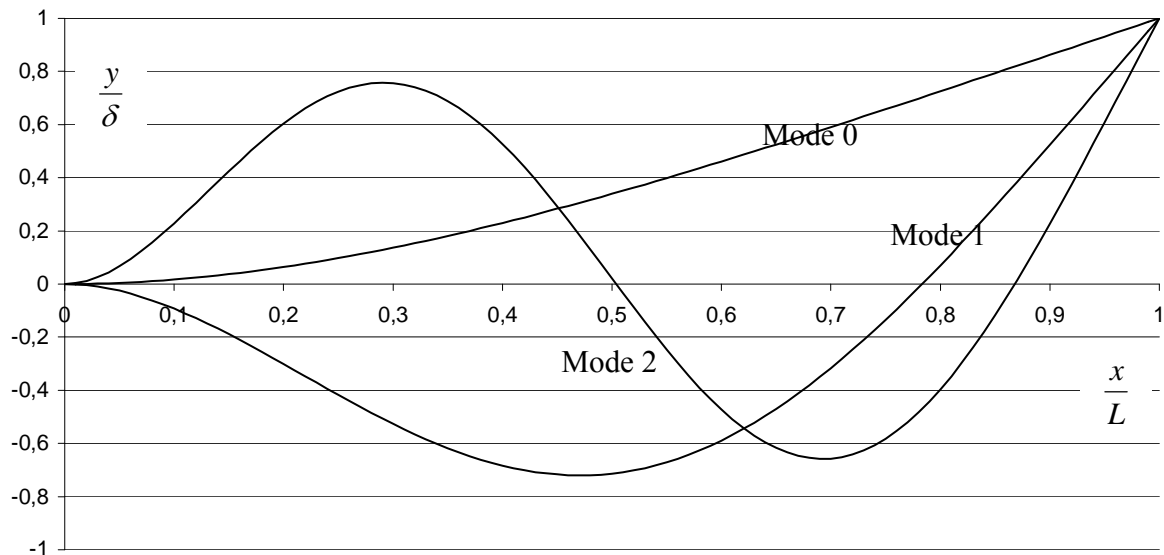
A.N. Dural : $L=150 \text{ mm}$, $h=5 \text{ mm}$, $E=70 \text{ GPa}$, $\rho=2.7 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ $v_0=182.8 \text{ Hz}$

La figure suivante compare en coordonnées réduites $(\frac{y}{\delta}, \frac{x}{L})$ les déformées du mode statique sous charge ponctuelle à l'extrémité libre et du mode fondamental de vibration libre (d'ordre 0).



Modes propres d'ordre supérieur

Le nombre de nœuds est égal à l'ordre du mode. La figure ci dessous schématise l'allure des premiers modes. Le mode fondamental est le plus facile à exciter. La théorie des modes propres montre que la déformée statique peut être obtenue par la somme pondérée (les facteurs de pondération étant fonction du chargement statique imposé) des déformées des différents modes propres de vibration libre. Cependant, plus l'ordre du mode est élevé et plus faible est son coefficient pondérateur. Quelles sont les conséquences sur l'excitation du levier par chargement statique et relâche brusque ?



Approximation de Rayleigh

La déformée statique sous charge ponctuelle d'extrémité est très voisine de la déformée de vibration libre du mode 0, ce qui signifie que le mode 0 est le mode prépondérant dans la décomposition en modes propres pour ce type de chargement, Rayleigh a déterminé une méthode approchée de calcul de la fréquence de résonance du fondamental sous les deux hypothèses suivantes :

- La déformée du fondamental est assimilée à la déformée statique sous l'action d'une masse équivalente M_e placée à l'extrémité d'une poutre supposée non pesante dont la raideur K est donnée par l'analyse statique $F=K\delta$, soit $K=\frac{3EI}{L^3}$ d'après un calcul précédent.
- La masse équivalente de l'éprouvette (de masse M) du point de vue des effets inertiels est obtenue par égalité des énergies cinétiques dans les deux configurations : masse uniformément répartie sur la longueur et masse concentrée à l'extrémité libre.



L'égalité des énergies cinétiques conduit à la relation $\frac{1}{2} M_e \left(\frac{d\delta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx$.

Soit, avec $w(x,t) = \frac{\delta}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \left(3 - \frac{x}{L} \right) \exp(i\omega t)$:

$$M_e = \int_0^L \rho S \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx = \rho S \frac{1}{4} \int_0^L \left(\frac{x}{L} \right)^4 \left(3 - \frac{x}{L} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \rho S L \int_0^1 x^4 (3-x)^2 dx = \frac{33}{140} \rho S L = \frac{33}{140} M.$$

La fréquence ν_0 est la fréquence propre d'un ressort de raideur K supportant une masse M_e , soit :

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M_e}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{140}{4 \cdot 33}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2} = 0,164 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2}$$

à comparer avec la solution exacte $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{12}} \alpha_0^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2} = 0,161 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2}$, soit une erreur relative :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = 1,8 \%$$

Montrer que si on laisse tomber le préfacteur, la forme de l'équation pour les fréquences propres aurait pu se déterminer par analyses dimensionnelle ou en loi d'échelle.

Correction de masse ajoutée

Si on rajoute (ou on enlève...) une masse M_a à l'extrémité d'une poutre homogène la formule de Rayleigh devient simplement :

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M_e + M_a}}$$

Traitement des modes supérieures

Pour les modes propres d'ordre supérieur on ne peut pas utiliser simplement la méthode de Rayleigh parce que ces modes n'ont pas d'analogie statique avec une forme similaire. Dans le domaine de petites déformations on peut néanmoins les considérer chacun comme un oscillateur harmonique indépendant, analogue à un système masse ressort, chacun avec des valeurs équivalents M_e^i et K_e^i tels que :

$$v_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_e^i}{M_e^i}}$$

Nous n'effectuerons pas ici ce calcul, mais il est important de retenir que dans l'approximation de petites oscillations (et éventuellement en présence d'un faible amortissement), on peut traiter chaque mode propre comme un oscillateur unidimensionnel masse/ressort indépendant. L'état de vibration globale sera la somme des vibrations de tous les modes propres, chacun étant présent en proportion d'un coefficient pondéral déterminé par les conditions initiales (par exemple par la méthode de stimulation de la poutre).

Cette importante approximation nous permettra de traiter le cas plus complexe d'une poutre vibrante en présence d'amortissement et d'un forçage extérieur, tout simplement en traitant chaque mode propre individuellement comme on oscillateur harmonique indépendant.

Résonance d'une structure réelle (oscillations amorties et forcées)

Les théories précédentes ne comportent pas de terme susceptible de limiter l'amplitude de la résonance dont le facteur de qualité Q est infini. Or tous les matériaux présentent des frottements internes (analogues aux pertes visqueuses) caractérisés par le coefficient de perte f .

Dans l'approximation de Rayleigh le modèle de résonance comporte un amortisseur visqueux de coefficient de perte f en parallèle à un ressort de raideur K supportant la masse M . L'équation de la dynamique s'écrit alors :

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + Kx = F \exp(i\omega t) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{f}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{M} x = \frac{F_0}{M} \exp(i\omega t)$$

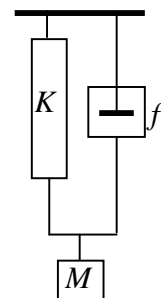
F_0 étant l'amplitude de la force excitatrice.

En posant $\omega_r^2 = \frac{K}{M}$, ω_r étant la fréquence de résonance de l'oscillateur non amorti,

et $\beta = \frac{f}{M}$, la solution s'écrit sous la forme $x = X_0 \exp(i\omega t + \varphi)$ vérifiant en amplitude et en phase :

$$\frac{X_0}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}} \quad \text{tg } \varphi = -\frac{\beta \omega}{\omega_r^2 - \omega^2}$$

L'allure de la réponse autour de la résonance est donnée dans la figure ci dessous :



- Elasticité : A basse fréquence, $\omega \rightarrow 0$, le terme dominant de l'équation

$M \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + Kx = F_0 \exp(i\omega t)$ est le terme de rappel élastique et l'équation se réduit à :

$$Kx = F_0 \exp(i\omega t) \quad \omega \ll \omega_r \quad X_0 \approx \frac{F_0}{K} \quad \varphi \approx 0$$

Régime quasi statique : pilotage en élasticité

- Inertie : A haute fréquence, $\omega \gg \omega_r$, le terme dominant de l'équation

$M \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + Kx = F_0 \exp(i\omega t)$ est le terme d'inertie et l'équation se réduit à :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F_0 \exp(i\omega t) \quad \omega \gg \omega_r \quad X_0 \approx \frac{F_0}{M\omega^2} \quad \varphi \approx -\pi$$

Régime inertiel: l'effet de la masse est celui d'un filtre passe bas avec une coupure en $\frac{1}{\omega^2}$.

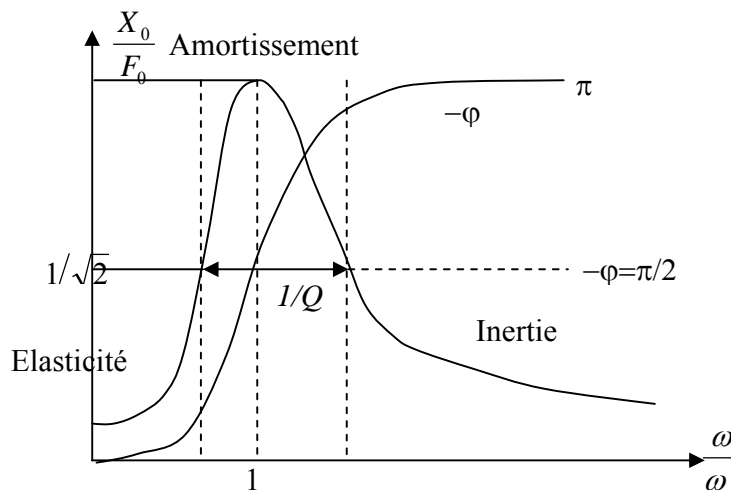
- Viscosité : Au voisinage de la fréquence de résonance, $\omega \approx \omega_r$, le terme dominant de l'équation $M \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + Kx = F_0 \exp(i\omega t)$ est le terme d'amortissement car les termes d'inertie et de rappel élastique se compensent et l'équation se réduit à :

$$f \frac{dx}{dt} = F_0 \exp(i\omega t) \quad \omega \approx \omega_r \quad X_0 \approx \frac{F_0}{f\omega} \quad \varphi \approx -\pi/2$$

Régime d'amortissement : limitation du facteur de surtension Q et élargissement du pic de la résonance qui s'accompagne d'un léger décalage de la résonance en général négligeable, l'amortissement étant en général faible. Le facteur de qualité est défini à partir de la largeur du pic de résonance à mi hauteur $\Delta\omega$. Comme la « mi hauteur » se réfère à l'énergie mécanique associée à l'oscillation, et que celle-ci dépend du carré de l'amplitude X_0 , il faut calculer la largeur $\Delta\omega$ pour la quelle l'amplitude se réduit d'un facteur $1/\sqrt{2}$:

$$\frac{X_0}{F_0}(\omega_r) = \frac{1}{\beta\omega_r} \quad \frac{X_0}{F_0}(\omega_r \pm \frac{\Delta\omega}{2}) \approx \frac{1}{\omega_r \beta \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\beta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{X_0}{F_0}(\omega_r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\beta\omega_r} \Rightarrow \Delta\omega = \beta$$

et le facteur de qualité (ou de surtension) $Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{\omega_r}{\beta}$ décroît lorsque l'amortissement β augmente.



Oscillations libres amorties

En l'absence d'un forçage extérieur, l'équation dynamique s'écrit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \omega_r^2 x = 0$$

avec $\beta = \frac{f}{M}$ et $\omega_r^2 = \frac{K}{M}$. En utilisant le formalisme complexe on peut encore écrire la solution en forme :

$$x(t) = X_0 \exp(i\omega t + \varphi)$$

en substituant dans l'équation différentielle et en simplifiant le terme $X_0 \exp(i\omega t + \varphi)$ on a :

$$(i\omega)^2 + \beta(i\omega) + \omega_r^2 = 0 \qquad \omega^2 - i\beta\omega - \omega_r^2 = 0$$

$$\omega = -i \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\omega_r^2 - \frac{\beta^2}{4}}$$

On revient finalement à la partie réelle de la solution :

$$x(t) = X_0 \exp\left(-\frac{\beta}{2} t\right) \cos(\pm \omega_l t + \varphi) \qquad \omega_l = \omega_r \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4\omega_r^2}} = \omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \qquad Q = \frac{\omega_r}{\beta}$$

La solution est constituée par le produit d'une oscillation harmonique avec une fréquence « libre » ω_l et d'un terme d'amortissement exponentiel. Si l'amortissement est faible ($1/Q = \beta/\omega_r \ll 1$) la fréquence libre ω_l n'est que légèrement inférieure à la fréquence de résonance ω_r et l'amortissement se traduit en une réduction exponentielle de l'amplitude d'oscillation.

